Michel **AGUAVO** - **Jean** *Marc* **CAZAUX**

E.N.S.E.E.I.H.T.

1983

-=- PROJET DE FIN D'ÉTUDES -=-

Au CNES/GEPAN - Toulouse
(Groupe d'Etudes des Phénomènes Aérospatiaux Non-identifiés)

-=-=-=-=-=-=-

OBJET :
Ecoulement hydrodynamique autour d'un cylindre
en présence d'un champ de forces de Laplace.

centre
national
d'études
spatiales

-=- REMERCIEMENTS -=-

-=- REMERCIEMENTS -=-

-=-=-=-=-=-=-

Nous remercions vivement M. Bernard ZAPPOLI pour nous avoir constamment et efficacement guidé tout au long de cette étude.

Nous adressons nos remerciements à M. HA MINH pour nous avoir fait profiter de sa grande connaissance de la mécanique des fluides.

Nous tenons également à remercier M. ESTERLE dont l'aide pour les calculs litéraux a été très efficace, et M. MAZET pour les conseils judicieux qu'il nous a prodigués dans la partie numérique de cette étude.

-=- SOMMAIRE -=-

SOMMAIRE

-=-=-=-=-

1ÈRE PARTIE

PRINCIPES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES, TRAVAUX ANTÉRIEURS

2ÈME PARTIE

DESCRIPTION DU MOUVEMENT DU FLUIDE SOUMIS À UNE FORCE NON CONSERVATIVE

1. GENERALITES

2. LINEARISATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

2.1. Cadre général de l'étude

2.1.1. Etude électrique et étude magnétique

2.1.2. Etude hydrodynamique

2.1.3. Autres hypothèses

2.2. Linéarisation des équations du mouvement

2.3. Equations à l'ordre 0

2.4. Equations à l'ordre I

2.5. Equations à l'ordre R_m

2.6. Equations à l'ordre IR_m

2.7. Solution analytique finale

CONCLUSION

.../...

3ÈME PARTIE

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

CONCLUSION GÉNÉRALE

ANNEXES

- ANNEXE 1 :
  Champ électrique créé par deux électrodes de potentiels opposés
  et de longueurs infinies -

- ANNEXE 2 :
  Rappels concernant les écoulement à potentiel de vitesse en fluide parfait :
  Solution pour le cas du cylindre infini -

- ANNEXE 3 :
  Champ électrique créé par deux électrodes de potentiels opposés et
  de longueurs finies 2 L -

- ANNEXE 4 :
  Non irrotationnalité de $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$ et $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{\prime 10}$ en $z = 0$ -

- ANNEXE 5 :
  Résolution par éléments finis
  Remplissage des différentes matrices -

- ANNEXE 6 :
  Listings et tracés -

-=- NOTATIONS -=-

NOTATIONS

$\vec{U}$	Champ de vitesses
P	Pression
$\vec{E}$	Champ électrique
$\vec{B_i}$	Champ magnétique induit
$\vec{B_R}$	Champ magnétique résultant
$\vec{J}$	Densité de courant
Γ_P	Frontière intérieure (paroi)
Γ_∞	Frontière extérieure (rejetée à l'infini)
Ω	Domaine d'étude de l'écoulement
$\delta\Omega$	Frontière de Ω
$\vec{U_\infty}$	Vitesse infinie
$\vec{B_\infty}$	Champ magnétique à l'infini
$\vec{F}$	Force de volume
μ	Permittivité magnétique
$\vec{n}$	Normale extérieure d'une frontière
$\vec{t}$	Tangente directe ($\vec{n}.\vec{t} > 0$) d'une frontfère
σ	Conductivité électrique
$\vec{E_R}$	Champ électrique de référence
L	Longueur de référence

.../...

	Masse volumique
R_m	Nombre de Reynolds magnétiques
I	Paramètre d'interaction
ε	Paramètre : $\dfrac{E_R}{B_0\, U_\infty}$
R	Rayon du cylindre
Ψ, ϕ	Fonction de courant,fonction de potentiel
C_p	Coefficient de pression
M	Nombre de HARTMAN
$\vec{\Omega}$	Vecteur tourbillon
$f(z)$	Potentiel complexe de l'écoulement

INTRODUCTION

INTRODUCTION

-=-=-=-=-=-

En 1975, JP. PETIT et M. VITON imaginent un champ de force de Laplace particulier qui, lié à un cylindre placé dans un écoulement supersonique de fluide conducteur, aurait la propriété de supprimer ou de diminuer très fortement l'intensité de l'onde de choc en front d'obstacle. Ils basent leur argumentation sur une expérience d'analogie hydraulique au cours de laquelle ils montrent que le champ de force en question supprime l'onde d'étrave d'un cylindre placé dans un écoulement bidimensionnel de fluide conducteur.

L'expérience reprise en 1981 à l'ENSAE confirme la disparition de l'onde d'étrave et montre une influence du champ de force sur les lignes de courant : par rapport à l'écoulement potentiel, celles-ci sont écartées à l'amont du cylindre et resserrées vers l'aval.

La modélisation de cet écoulement M.H.D. fut abordée en 1982 par F. JEAN et E. BERNARD, au cours de leur projet de fin d'études de l'ENSAE . Ils montrent que dans le cadre d'un écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre de longueur infinie conduisant à une configuration bidimensionnelle du champ électrique, le champ de force est irrotationnel. Seul le champ des pressions est modifié car en tout point le gradient de pression est équilibré par le champ de force de volume, la vitesse restant inchangée. Par rapport à la pression de l'écoulement potentiel, celle-ci est abaissée en amont et augmentée en aval ; l'effet global est l'apparition d'une force propulsive, mais le modèle ne rend pas compte de la modification des lignes de courant.

.../...

L'objet du présent travail est précisément de modéliser cette action du champ de forces sur les lignes de courant. Il est nécessaire pour cela de considérer une force non-irrotationnelle qui, ne pouvant plus de ce fait équilibrer le gradient de pression, entraîne une modification des lignes de courant.

Ainsi, après avoir exposé dans le premier chapitre les principes de la géométrie du champ de forces, les équations générales, les travaux antérieurs et leurs acquis, le deuxième chapitre présente les hypothèses actuellement faites pour tenir compte des effets tridimensionnels électriques et magnétiques dans le cadre de la linéarisation des équations du fluide parfait bidimensionnel par double développement asymptotique.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode numérique "éléments finis" utilisée pour résoudre les équations linéarisées aux différents ordres ainsi qu'à l'exposé des résultats obtenus dans les différentes configurations de position des électrodes.

Les résultats sont en bon accord avec les observations qualitatives expérimentales.

- 1ère Partie -

Principes et équations générales

Travaux antérieurs

-=-=-=-=-

PRINCIPES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES

TRAVAUX ANTÉRIEURS

-=-=-=-=-

1. PRINCIPES GÉNÉRAUX

Des expériences ont montré que l'action d'un champ de force de Laplace particulier, de la forme $\vec{J} \wedge \vec{B}$ ($\vec{J}$: ensemble de tous les courants agissant sur le fluide, $\vec{B}$: résultante des champs magnétiques), lié à un cylindre placé dans un écoulement supersonique de fluide conducteur, diminuerait fortement l'intensité de l'onde de choc.

Cette argumentation est basée sur une expérience d'analogie hydraulique au cours de laquelle on montre que le champ de force en question supprime l'onde d'étrave d'un cylindre placé dans un écoulement bidimensionnel incompressible de fluide conducteur, et modifie les lignes de courant. Par rapport à l'écoulement à potentiel, celles-ci sont écartées à l'amont du cylindre et reserrées vers l'aval.

2. EQUATIONS GÉNÉRALES

2.1 . EQUATIONS HYDRODYNAMIQUES

D'une manière générale, le mouvement d'un fluide est régi par les équations de NAVIER STOKES. Soit :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \vec{V}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho\, \mathrm{div}\, \vec{V} = 0$$

.../...

• Equation de quantité de mouvement

$$* \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} \right) = -\vec{\nabla}p + \rho \nu \Delta \vec{V} + \rho \vec{F}$$

où $\rho \vec{F}$ représente l'action des forces de volume.

Dans le cas particulier de l'écoulement stationnaire incompressible d'un fluide parfait, ces équations, connues sous le nom d'équations d'EULER, deviennent :

$$a \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$* \ (\vec{V}.\vec{\nabla}) . \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{F}$$

2.2, EQUATIONS DE L'ELECTROMAGNETISME

Elles sont régies par les équations de MAXWELL :

$$x \overrightarrow{rot} \, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$x \ \overrightarrow{rot} \, \vec{B} = \mu \vec{J}$$

$$* \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

et par la loi d'Ohm généralisée :

$$x \ \vec{J} = \sigma \ (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

2.3. EQUATIONS DE LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE

Pour obtenir ces équations, il suffit de coupler le problème hydrodynamique et électromagnétique. Les équations deviennent en fluide parfait :

$$* \ (1) : \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

.../...

$$\star\ (2) : \quad \rho(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}p + \vec{J}\wedge\vec{B} = -\vec{\nabla}p + \sigma(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B})\wedge\vec{B}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\star\ (2') : \quad \rho\left(\vec{\nabla}\left(\frac{V^2}{2}\right) + (\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\wedge\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{J}\wedge\vec{B}$$

$$\star\ (3) : \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\star\ (4) : \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{J} = \mu_0\,\sigma\,(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B})$$

$$\star\ (5) : \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\star\ (6) : \quad \vec{J} = \sigma\,(\vec{E} + \vec{V}\wedge\vec{B})$$

On traduit donc dans l'équation (2) l'interaction d'un courant électrique et d'un champ magnétique sur chaque unité de volume fluide.

Afin d'évaluer l'importance relative des différents termes dans les équations, on introduit les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_0} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{E}}{E_{Ref}} \qquad \vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{u_\infty} \qquad p^* = \frac{p}{\rho\, u_\infty^2}$$

$$x_i^* = \frac{x_i}{L}$$

Les équations s'écrivent alors :

$$\star\ (1) : \quad \vec{\nabla}^*\,\vec{u}^* = 0$$

$$\star\ (2) : \quad (\vec{u}^*.\vec{\nabla}^*)\,\vec{u}^* + \vec{\nabla}^* p^* = I\,(\vec{E} + \varepsilon\,\vec{u}^*\wedge\vec{B}^*)\wedge\vec{B}^*$$

$$\star\ (3) : \quad \vec{\nabla}^*.\vec{E}^* = 0 \qquad \vec{\nabla}^*\wedge\vec{E}^* = \vec{0}$$

$$\star\ (4) : \quad \vec{\nabla}^*\wedge\vec{B}^* = \eta\,R_m\,(\vec{E}^* + \varepsilon\,\vec{u}^*\wedge\vec{B}^*) \quad \text{avec } \eta = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\star\ (5) : \quad \vec{\nabla}^*.\vec{B}^* = 0$$

.../...

Ces équations font apparaitre 3 paramètres $(I, R_m, \mathcal{E})$ dont on montre facilement qu'ils sont indépendants, avec :

* $I = \dfrac{\sigma B_o E_{Ref} L}{\rho U_\infty^2}$: paramètre d'interaction qui fixe l'ordre de la force perturbatrice par rapport à la quantité de mouvement du fluide.

* $R_m = \mu_o \sigma U_\infty L$: nombre de Reynolds magnétiques.

* $\mathcal{E} = \dfrac{E_R}{B_o U_\infty}$: fixe l'ordre de grandeur du courant dû au champ électrique à celui induit par le champ magnétique.

En combinant les équations (3), (4), (5) et (6), on obtient la relation classique régissant l'action d'un champ magnétique sur un fluide conducteur, soit en régime stationnaire :

$$* \ (7) : \quad \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} = 0 = \overrightarrow{rot}\left(\vec{U}^* \wedge \vec{B}^*\right) + \frac{1}{R_m} \Delta \vec{B}^*$$

cette équation étant analogue en hydrodynamique à l'équation du troubillon en régime stationnaire.

$$* \ \frac{\partial \vec{\Omega}^*}{\partial t} = 0 = \overrightarrow{rot}\left(\vec{U}^* \wedge \vec{\Omega}^*\right) + \frac{1}{R_e} \Delta \vec{\Omega}^*$$

où R_e est le nombre de Reynolds $R_e = \dfrac{U_o\, L}{\nu}$

Le nombre de Reynolds magnétiques R_m qui représente, par analogie avec le Reynolds hydrodynamique, le rapport du terme de convection de B à celui de diffusion de B, nous permet de définir deux grandes classes de problèmes en M.H.D. :

* $R_m \ll 1$: régime à diffusion prépondérante ; l'ordre de grandeur des courants électriques est tel que le champ magnétique est peu perturbé par les courants.

.../...

* $R_m >> 1$: régime à convection prépondérante. Le champ magnétique apparaît comme convecté par l'écoulement du fluide (hypothèse du champ gelé).

D'autre part, en remplaçant $\vec{J}$ et P par leur forme adimensionnelle respectives dans l'équation de la dynamique :

$$* \quad R_e \left(\left(\vec{u}^* . \vec{\nabla} \right) \vec{u}^* + \vec{\nabla}^* P^* \right) = \Delta \vec{u}^* + M^2 \left(\vec{J}^* \wedge \vec{B}^* \right)$$

on fait apparaitre : le nombre de HARTMANN. M :

$$* \; M = B_o \, L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$$

qui fixe l'ordre de grandeur relatif des forces de Laplace et des forces de viscosité. On remarque que le paramètre d'interaction I défini précédemment s'exprime en fonction de M :

$$* \; I = \frac{M^2}{R_e}$$

3. TRAVAUX ANTÉRIEURS

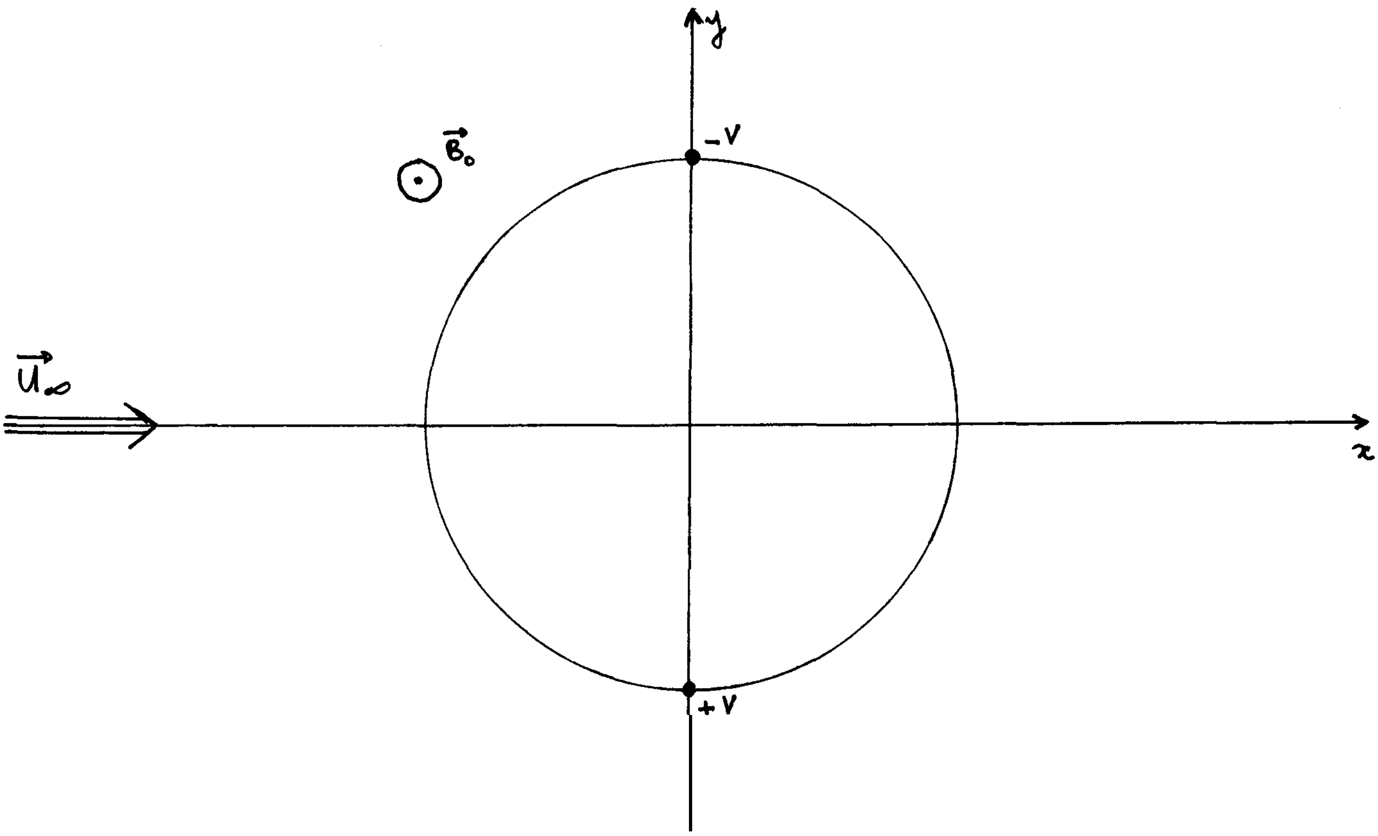
3.1. PRESENTATION

3.1.1. Cadre général de l'étude

Ces travaux concernent l'écoulement bidimensionnel stationnaire et incompressible d'un fluide parfait autour d'un cylindre isolant possédant deux électrodes de potentiels opposés, disposées de façon symétrique par rapport à l'axe du cylindre, le tout étant placé perpendiculairement au plan de l'écoulement. De plus, dans la région entourant le cylindre, on impose un champ ma-

.../...

gnétique $\vec{B}_0$ constant dont la direction est parallèle aux génératrices du cylindre.



3.1.2. Hypothèses supplémentaires et mise en équations du problème

Dans toute notre étude, nous nous plaçons dans le cas où $R_m << 1$, c'est à dire dans un régime à diffusion prépondérante. D'autre part, on néglige $\vec{u} \wedge \vec{B}$ car le paramètre est tel que : $\varepsilon << 1$.

Le champ magnétique créé par l'ensemble des courants agissant sur le fluide devient de ce fait une perturbation devant B_0.

Le système général d'équations devient alors :

$$* \ \vec{\nabla}^* . \vec{u}^* = 0$$

$$\rho (\vec{u} . \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \sigma \vec{E} \wedge \vec{B}_R \quad \text{avec} \quad \vec{B}_R = \vec{B}_0 + \vec{B}_{ind}$$

.../...

* $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}$ $\qquad$ $\text{div}\ \vec{E} = 0$

* $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}_i = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \sigma \vec{E}$

* $\text{div}\ \vec{B} = 0$

* $\vec{J} = \sigma\ \vec{E}$

Pour une vitesse à l'infini imposée, le type d'écoulement dépend du terme source de forces extérieures $\vec{J} \wedge \vec{B}$ qu'il faut déterminer d'abord en calculant $\vec{J}$, ensuite en calculant $\vec{B}_{induit}$ par cette distribution de courant.

3.1.3. Champ magnétique et champ électrique

Champ électrique

On calcule ici le champ électrique créé en tout point de l'espace par deux conducteurs rectilignes infiniment longs, portés respectivement aux potentiels $\pm$ V. Le calcul est effectué en Annexe 1.

On obtient :

$$E_r = \frac{2RV}{\log\frac{2R}{a}} \times \frac{(R^2 - r^2)\sin\theta}{(R^2+r^2) - 4r^2R^2\sin^2\theta}$$

$$E_\theta = \frac{2RV}{\log\frac{2R}{a}} \times \frac{(R^2+r^2)\cos\theta}{(R^2+r^2) - 4r^2R^2\sin^2\theta}$$

que l'on peut écrire en coordonnées cartésiennes :

$$E_x = -\frac{2RV}{\log\frac{2R}{a}} \times \frac{2xy}{(x^2-y^2+R^2)^2 + 4x^2y^2}$$

$$E_y = +\frac{2RV}{\log\frac{2R}{a}} \times \frac{x^2-y^2+R^2}{(x^2-y^2+R^2)^2 + 4x^2y^2}$$

.../...

• Champ magnétique induit

Il s'agit du champ magnétique induit par le courant généré par le champ électrique précédent. Ce calcul est développé dans l'Annexe 1 à partir de l'équation qui, sous forme adimensionnelle, s'écrit :

$$* \quad \overrightarrow{rot}^* \vec{B}_i^* = \vec{E}^* \qquad \text{avec } \vec{B}_i^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{iz}^* \end{vmatrix}$$

(d'après la géométrie du problème).

On obtient :

$$* \quad B_{iz}^* = -\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{2R}{a}} \left(\operatorname{Arctg} \frac{r + \sin\theta}{\cos\theta} + \operatorname{Arctg} \frac{r - \sin\theta}{\cos\theta} - \pi \right) \text{ pour } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

$$* \quad B_{iz}^* = -\frac{1}{\operatorname{Log}\frac{2R}{a}} \left(\operatorname{Arctg} \frac{r + \sin\theta}{\cos\theta} + \operatorname{Arctg} \frac{r - \sin\theta}{\cos\theta} + \pi \right) \text{ pour } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$$

ou en coordonnées cartésiennes :

$$* \quad B_{iz}^* = \frac{1}{\operatorname{Log}\frac{2R}{a}} \left(\operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{y+1}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{y-1}\right) \right)$$

3.2. PRINCIPAUX RESULTATS ET CONCLUSIONS

3.2.1. Expression de la force électromagnétique

Les expressions précédentes de $\vec{J}$ et $\vec{B}$ permettent de calculer les forces de Laplace $\vec{J} \wedge \vec{B}_R$ (avec $\vec{B}_R = \vec{B}_i + \vec{B}_o$), deuxième membre de l'équation de la quantité de mouvement :

$$* \quad \rho \left(\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{J} \wedge \vec{B}_R$$

avec : (1) $$\vec{J} \wedge \vec{B}_R = \frac{1}{\mu_o} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_i \right) \wedge \left(\vec{B}_o + \vec{B}_i \right) = \frac{1}{\mu_o} \begin{vmatrix} -(B_o + B_{iz}) \dfrac{\partial B_{iz}}{\partial x} \\ -(B_o + B_{iz}) \dfrac{\partial B_{iz}}{\partial y} \\ 0 \end{vmatrix}$$

.../...

3.2.2. instationnalité de $\vec{J} \wedge \vec{B}_R$, ses conséquences

On constate d'après (1) que la force $\vec{J} \wedge \vec{B}_R$ peut se mettre sous la forme d'un gradient :

$$* \quad \vec{J} \wedge \vec{B}_R = -\vec{\nabla}\phi \qquad \text{avec} \qquad \phi = \frac{1}{\mu_0}\left(B_0 B_{iz} + \frac{1}{2} B_{iz}^2\right)$$

Cette force est donc irrotationnelle, conservative.
L'équation de la quantité de mouvement s'écrit dans ces conditions :

$$* \quad \rho\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}\left(p + \frac{B_0}{\mu_0} B_{iz} + \frac{1}{2\mu_0} B_{iz}^2\right)$$

où de manière équivalente :

$$* \quad \rho\left(\frac{1}{2}\rho\, u^2 + \vec{u}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right)\right) = -\vec{\nabla}\left(p + \frac{B_0}{\mu_0} B_{iz} + \frac{1}{2\mu_0} B_{iz}^2\right)$$

soit :

$$* \quad \rho\,\vec{u}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}\left(p + \frac{1}{2}\rho\, u^2 + \frac{B_0}{\mu_0} B_{iz} + \frac{1}{2\mu_0} B_{iz}^2\right)$$

Si de plus on suppose que l'écoulement permanent considéré provient d'un écoulement initialement irrotationnel, le rotationnel de la vitesse est toujours nul : il n'y a en effet aucune production volumique de vorticité et celle-ci est tout simplement connectée par l'écoulement, et nulle pour $t = 0$, elle le sera pour tout t.(Théorème de LAGRANGE).

On obtient ainsi la formulation particulière du théorème de Bernouilli :

$$* \ (2) : \quad \boxed{p + \frac{1}{2}\rho\, u^2 + \frac{B_0}{\mu_0} B_{iz} + \frac{1}{2\mu_0} B_{iz}^2 = cte}$$

.../...

Les forces de Laplace irrotationnelles équilibrent en tous points le gradient de pression. Aucune perturbation du champ des vitesses n'est possible et suit l'expression classique pour l'écoulement a potentiel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre (ce calcul est développé en Annexe 2), soit sous forme complexe :

$$* \quad W(z) = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) \quad \text{d'où :} \quad \left| \begin{array}{l} U_x = U_\infty \left(1 - \dfrac{R^2 (x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ U_y = U_\infty \left(\dfrac{-2Rxy}{(x^2+y^2)^2}\right) \end{array} \right.$$

tandis que le champ de pressions perturbé devient :

$$* \quad p' = p + \phi \qquad \text{avec :} \quad \phi = \frac{B_0}{\mu_0} B_{iz} + \frac{B_{iz}^2}{2\mu_0}$$

On peut maintenant, à partir de ces considérations, étudier l'évolution de la pression à la paroi du cylindre avant et après l'application de la force de Laplace pour dégager l'effet de poussée escompté.

Pour cela, nous allons tracer les courbes Kp (coefficient de pression) le long du cylindre. Nous allons rappeler la définition du coefficient de pression : "*ai p est La pression statique en un point de la paroi du cylindre, on définit ainsi Re coefficient de pression locale :*

$$\boxed{K_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}} \qquad \textit{(nombre sans dimension)}$$

p_0, ρ *et* U_∞ *désignant les conditions à l'infini*".

En appliquant le théorème de Bernouilli, nous avons :

$$* \quad p_0 + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p' + \frac{1}{2}\rho U^2$$

.../...

d'où :

$$\star \quad K_p = \frac{(p+\phi) - p_0}{1/2 \rho\, U_\infty^2} = \frac{p - p_0}{1/2 \rho\, U_\infty^2} + \frac{2\phi}{\rho\, U_\infty^2}$$

et :

$$\star \quad \boxed{K_p = K_{p_0} + \frac{2\phi}{\rho\, U_\infty^2}}$$

avec K_{p_0} qui représente le coefficient de pression avant l'application du champ de force de Laplace.

Nous avons donc les relations suivantes :

- Sans champ : $K_{p_0} = 1 - 4 \sin^2\theta$

- Avec champ : $K_p = 1 - 4 \sin^2\theta + \frac{2\phi}{\rho\, U_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2\theta + \frac{2 B_{iz}}{\mu_0 \rho\, U_\infty^2}\left(B_0 + \frac{B_{iz}}{2}\right)$

Les calculs de l'Annexe 1 montrent que B_z qui est constant sur le cylindre a pour valeur :

- sur la face amont du cylindre : ($x<0$) ($\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$) :

$$\star \quad B_{z\,cyl} = \frac{\mu_0 \sigma V}{\mathrm{Lg}\,\frac{2R}{a}} \times \left(+\frac{\pi}{2}\right)$$

- sur la face aval ($x > 0$) ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) :

$$\star \quad B_{z\,cyl} = \frac{\mu_0 \sigma V}{\mathrm{Lg}\,\frac{2R}{a}} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

d'autre part, étant donné les valeurs de μ_0 et , on peut négliger sur le cylindre le terme B_z devant B_0.

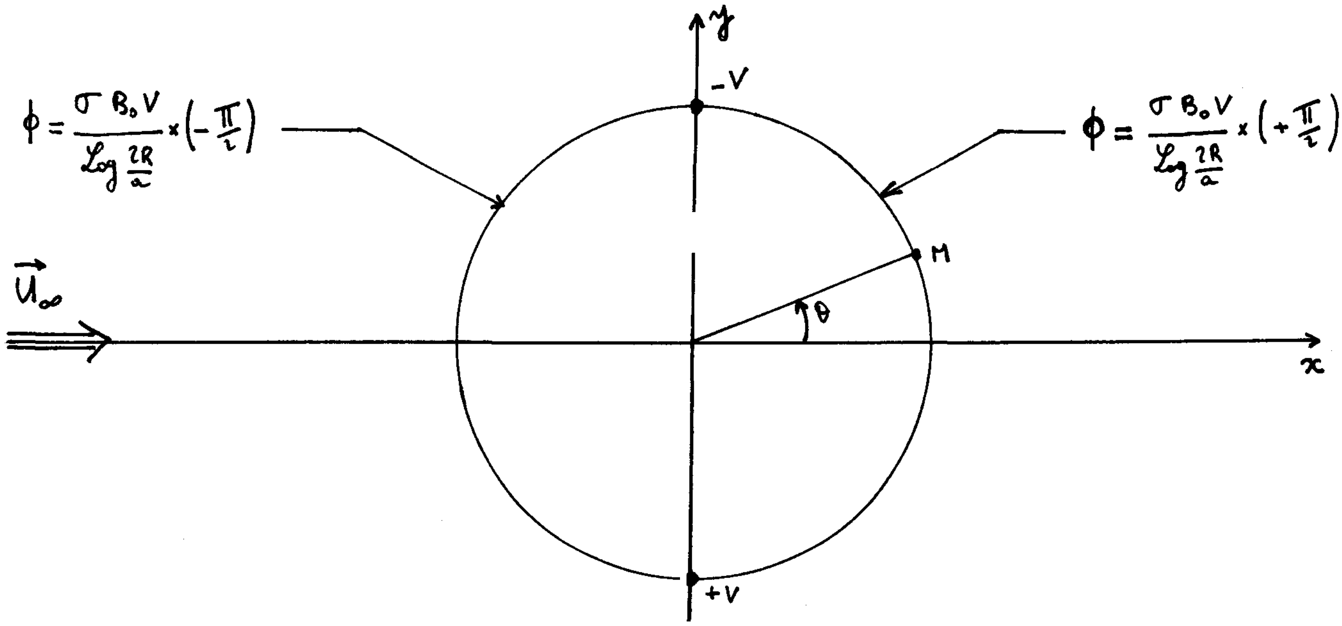
.../...

Il vient donc :

$$* \quad K_p = 1 - 4\sin^2\theta + \frac{2\phi}{\rho U_\infty^2} \quad \text{avec} \quad \phi \simeq \frac{B_0 B_z}{\mu_0}$$

d'où :

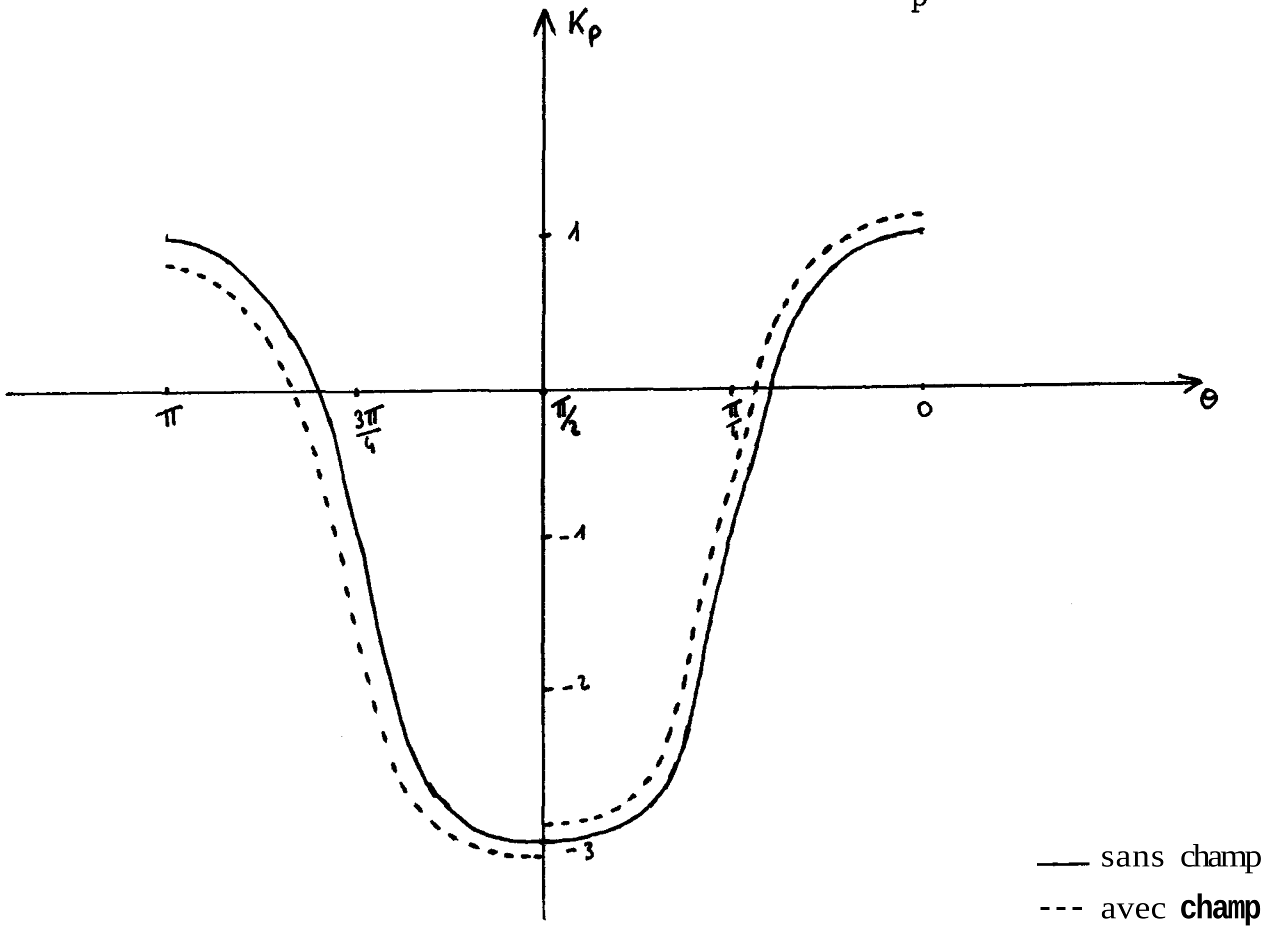
$$* \quad K_p = 1 - 4\sin^2\theta + \frac{2 B_0 B_z}{\mu_0 \rho U_\infty^2}$$



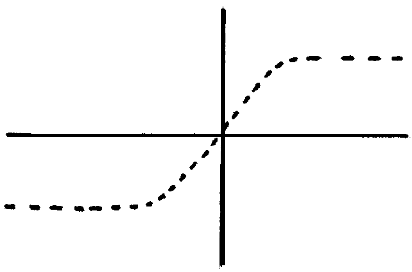
La force de Laplace aura donc tendance à créer une dépression vers l'avant du cylindre ($p' = p + \phi$ avec $\phi < 0$) et une compression vers l'arrière ($\phi > 0$) d'où il résulte une force dirigée vers l'avant qui sera donc une force de type propulsif.

.../...

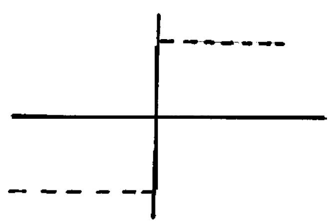
• Tracé de l'allure de la fonction K_p (θ)



On remarque que l'on a une discontinuité de la courbe pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ qui est due au fait que l'on traverse les électrodes. Pour éviter cela, il suffit de choisir un moyen de les contourner (par exemple un petit cercle de rayon a et nous awns :



au lieu de :

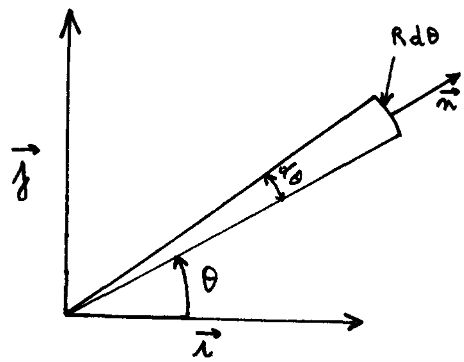


.../...

• Expression de la force propulsive

La force agissant sur le cylindre isolant n'est due qu'aux forces de pression statique ; car le champ magnétique n'influencera pas le cylindre lui-même. La résultante des forces de pression. s'exprime par :

$$* \quad \vec{F} = -\int_0^{2\pi} p \, \vec{n} \, dS \qquad \text{avec :} \quad \begin{aligned} dS &= R \, d\theta \, dz \\ \vec{n} &= \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j} \end{aligned}$$



Cette résultante étant portée par l'axe des X, nous avons en projection sur cet axe :

$$* \quad F_x = -\int_0^{2\pi} p \cos\theta \, R \, d\theta .$$

En utilisant le théorème de Bernouilli (2), il suit :

$$* \quad F_x = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho \, U_{cyl}^2 \cos\theta \, R \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\mu_0} B_{z\,cyl}^2 \cos\theta \, R \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{B_0}{\mu_0} B_{z\,cyl} \cos\theta \, R \, d\theta$$

$$\text{car} \int_0^{2\pi} \text{cste} \cos\theta \, R \, d\theta = 0$$

Nous avons vu précédemment que l'expression du champ de vitesse était :

$$* \quad \vec{U} \left| \begin{aligned} u &= U_\infty \left(1 - R^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \\ v &= -U_\infty \left(\frac{2R^2 x y}{(x^2+y^2)^2} \right) \end{aligned} \right.$$

.../...

A la surface du cylindre, nous avons donc :

$$* \text{ pour : } \quad x^2 + y^2 = R^2 \qquad U^2_{cyl} = 4 U^2_\infty \sin^2\theta$$

d'où :

$$* \int^{2\pi} \frac{1}{2} \rho \, U^2_{cyl} \cos\theta \, R \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \rho \, U^2_\infty \sin^2\theta \cos\theta \, R \, d\theta \, .$$

$$= 2 \rho \, U^2_\infty R \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{2\pi}$$

Ce résultat est connu sous le nom de "paradoxe de d'Alembert" : pour un écoulement à potentiel de vitesse uniforme (fuide parfait), c'est à dire quee la résultante des forces de pression s'exerçant sur le cylindre est nulle.

D'autre part, nous avons vu que :

$$* \quad B_z \, cyl = \frac{V \mu_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}} \times \left(+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

et :

$$* \quad B_z \, cyl = \frac{V \mu_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$* \quad B^2_z \, cyl = \frac{\sigma^2 \mu_0^2 V^2}{\left(\mathcal{L}og \frac{2R}{a}\right)^2} = cte$$

donc :

$$* \int_0^{2\pi} B^2_z \, cyl \cos\theta \, R \, d\theta = 0$$

par conséquent :

$$* \quad F_x = \frac{R B_0}{\mu_0} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} +\frac{\pi}{2} \, \frac{V \mu_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}} \cos\theta \, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} \, \frac{V \mu_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}} \cos\theta \, d\theta \right)$$

.../...

d'où :

$$\star \quad F_x = -2\pi R \frac{V B_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}}$$

donc :

$$\star \quad \boxed{\vec{F} = -2\pi R \frac{V B_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}} \vec{\imath}}$$

On vérifie bien que l'on obtient une force propulsive qui est indépendante de u_∞. On remarque aussi que si l'on inverse les deux électrodes, on change le sens de $\vec{F}$ et on obtient dans ce cas une trainée et non une force propulsive.

On vérifie aussi que la portance $F_y = -\int_0^{2\pi} p \sin\theta \, R \, d\theta$ est nulle. De même, un calcul simple en fluide parfait montre que le champ de Laplace peut entretenir une accélération.

En écrivant que : $m \frac{d\vec{u}}{dt} = \Sigma \vec{F}$
on arrive à l'équation suivante :

$$\star \quad m' \frac{du}{dt} = 2\pi R \frac{V B_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}}$$

La répartition de pression induite par le champ de force de Laplace est capable d'entretenir une accélération (ou un freinage si $V < 0$). Pour avoir une idée de l'intensité de la force propulsive, on peut faire une rapide application numérique, avec des valeurs qui furent celles du dispositif expérimental dans le cas où le fluide est un plasma.

- $\star$ $V = 100$ V $\qquad a = 10^{-5}$ m
- $\star$ $R = 10^{-2}$ m $\qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
- $\star$ $\sigma = 1$ ohm/m $\qquad u_\infty = 50$ m/s
- $\star$ $B_0 = 0,3$ T

$$\Longrightarrow \quad |\vec{F}| = \frac{2\pi R V B_0 \sigma}{\mathcal{L}og \frac{2R}{a}} = 0,242 \text{ N/m}$$

.../...

• Remarque

Il faut reconnaître l'intérêt très relatif de ce calcul en fluide parfait qui représente mal les efforts aérodynamiques (paradoxe de d'Alembert). Un calcul en fluide visqueux s'impose pour rendre compte correctement du bilan de forces.

CONCLUSION

Dans cette première partie, la configuration électromagnétique permet de mettre en évidence la présence d'un champ de forces irrotationnel qui n'a d'influence que sur le champ de pression , et qui induit par conséquent une force propulsive.

Cependant, il serait intéressant d'étudier les perturbations que peuvent engendrer les forces de Laplace sur le champ de vitesses et sur les lignes de courant. C'est ce que nous allons développer dans la deuxième partie en prenant une configuration différente.

- 2ème Partie -

Description du mouvement du fluide soumis à une force de volume non conservative

-=-=-=-=-=-

DESCRIPTION DU MOUVEMENT DU FLUIDE SOUMIS À UNE FORCE DE VOLUME NON CONSERVATIVE

-=-=-=-=-

1. GÉNÉRALITÉS

La première partie de ce mémoire a exposé les travaux antérieurs traitant essentiellement la configuration d'un cylindre infini qui conduit à un champ de forces irrotationnel qui n'influence que la pression.

Il est donc nécessaire pour décrire l'influence du champ de forces sur les lignes de courant d'introduire un modèle plus conforme à la configuration expérimentale et considérer un cylindre de longueur finie qui permet par les effets tridimensionnels des champs électriques et magnétiques induits d'obtenir des forces non conservatives.

Le calcul est limité à l'étude des petites perturbations d'un champ de forces de Laplace faible devant les forces d'inertie ; situation pour laquelle une linéarisation du mouvement est possible.

2. LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

2.1. CADRE GENERAL DE L'ETUDE

2.1.1. Electrique et magnétique

Pour introduire les effets tridimensionnels du champ de forces de Laplace, nous nous plaçons dans le même cas de figure que précédemment, mais

.../...

en remplaçant les électrodes de longueur infinie par des électrodes de longueur. finie,, les grandeurs électromagnétiques (potentiel et champ électrique, champ magnétique induit par ce courant, champ de forces de Laplace) devenant de ce fait des fonctions de z.

2.1.2. Hydrodynamique

Les objectifs de cette seconde partie nous ont conduit à introduire un schéma tridimensionnel pour la partie électromagnétisme. Compte tenu de la configuration expérimentale, il semble a priori qu'un calcul bidimensionnel paisse conduire à une description correcte du comportement du fluide.

Nous étudierons ainsi la couche bidimensionnelle de fluide située de part et d'autre du plan de symétrie $z = 0$ qui est perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

Les hypothèses d'études restent celles de l'écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait.

2.1.3. Autres hypothèses

Dans la loi d'Ohm ($\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$), on néglige le terme $\vec{u} \wedge \vec{B}$. Compte tenu du cadre général de l'étude, un simple calcul d'ordre de grandeur montre que cette hypothèse est justifiée.

De plus, on suppose que le champ de force qui agit sur la couche de fluide est celui qui existe au voisinage de $z = 0$, cela découle des hypothèses du paragraphe 2.1.2.

2.2, LINEARISATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

Compte tenu de toutes ces hypothèses, le système d'équations couplées mis sous forme adimensionnelle, est de la forme présentée ci-après.

.../...

A savoir :

* $\vec{\nabla}^* \vec{u}^* = 0$

* $(\vec{u}^* . \vec{\nabla}^*)\, \vec{u}^* + \vec{\nabla}^* p^* = I\, (\vec{E}^* + \varepsilon\, \vec{u}^* \wedge \vec{B}^*) \wedge \vec{B}^*$

* $\vec{\nabla}^* \vec{E}^* = 0$ $\qquad \vec{\nabla}^* \wedge \vec{E}^* = \vec{0}$

* $\vec{\nabla}^* \wedge \vec{B}^* = \frac{R_m}{\varepsilon} (\vec{E}^* + \varepsilon\, \vec{u}^* \wedge \vec{B}^*)$

* $\vec{\nabla}^* . \vec{B}^* = 0$

où l'on rappelle que (voir la première partie) :

* $I = \dfrac{\sigma\, B_o\, E_R\, L}{\rho\, U_\infty^2}$ est le paramètre d'interaction qui fixe l'ordre de la force perturbatrice par rapport à la quantité de mouvement du fluide.

* $R_m = \mu_o\, \sigma\, U_\infty\, L$ est le nombre de Reynolds magnétique.

* $\varepsilon = \dfrac{E_R}{B_o\, U_\infty}$ fixe l'ordre de grandeur du courant dû au champ électrique à celui induit par le champ magnétique.

Mais le Reynolds magnétique doit être défini dans notre cas à partir de E_{Ref} et non pas de $B_o U_\infty$, car il ne faut pas oublier que R_m caractérise l'ordre de grandeur relatif de B_o et du champ magnétique induit par tous les courants.

Avec $R_m = \dfrac{\mu_o\, \sigma\, E_R\, L}{B_o}$ le système à résoudre est donc le suivant :

* $\vec{\nabla}^* \vec{u}^* = 0$

* $(\vec{u}^* . \vec{\nabla}^*)\, \vec{u}^* + \vec{\nabla}^* p^* = I\, (\vec{E}^* + \varepsilon\, \vec{u}^* \wedge \vec{B}^*) \wedge \vec{B}^*$

.../...

$$* \quad \vec{\nabla}^* \cdot \vec{E}^* = 0 \qquad \vec{\nabla}^* \wedge \vec{E}^* = \vec{0}$$

$$* \quad \vec{\nabla}^* \wedge \vec{B}^* = R_m \left(\vec{E}^* + \varepsilon \, \vec{u}^* \wedge \vec{B}^* \right)$$

$$* \quad \vec{\nabla}^* \cdot \vec{B}^* = 0$$

La résolution du système complet n'entrerait pas dans le cadre d'un projet, et c'est la raison pour laquelle nous avons limité l'étude à la recherche des solutions approchées.

Dans cette optique, et en se plaçant dans des conditions où les paramètres I, R_m et ε sont petits devant l'unité, nous allons effectuer des développements asymptotiques suivant ces paramètres pour pouvoir découpler leurs effets et rendre les équations plus simples et plus solubles.

Ainsi, lorsque I, R_m ou ε tendent vers 0, les équations ne changent pas de nature (même ordre de dérivation) et les perturbations en I, R_m et ε sont donc a priori régulières. Ces trois paramètres étant indépendants (ceci est déjà mentionné dans la première partie), on peut donc décomposer toute grandeur A sous la forme :

$$* \quad A = A_0 + \left[R_m A_1^{10} + I \, A_1^{01} + \varepsilon A_1 \right] + \left[I R_m A_1^{11} + \ldots\ldots \right.$$

et penser que cette approximation sera uniformément valable.

En portant ce développement dans les équations et en identifiant tous les termes de même ordre, on obtient les équations découplées en I, R_m, ε , IR_m ...

.../...

2.3. EQUATION A L'ORDRE 0

Le système devient à l'ordre 0 :

$$* \ \vec{\nabla}.\vec{B}_0 = 0 \qquad\qquad * \ \vec{\nabla}\wedge\vec{B}_0 = \vec{0}$$

$$* \ \vec{\nabla}.\vec{E}_0 = 0 \qquad\qquad * \ \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$* \ (\vec{U}_0 . \vec{\nabla})\vec{U}_0 + \vec{\nabla} p_0 = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\,\vec{U}_0 = 0$$

avec comme conditions aux limites :

$$* \ U_0 = 1 \text{ sur } \Gamma_\infty \text{ (frontière infinie)} \quad \Big| \ . \ \vec{B}_0 = \vec{k} \text{ sur } \Gamma_\infty \quad \Big| \ \vec{E}_0 = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_\infty$$

$$* \ \vec{U}_0 . \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_p \text{ (surface du cylindre)} \quad \Big| \ . \ (\vec{\nabla}\wedge\vec{B}_0)\,\vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_p \quad \Big| \ V = \pm V_0$$

et donc à cet ordre les problèmes hydrodynamiques et électromagnétique sont totalement découplés :

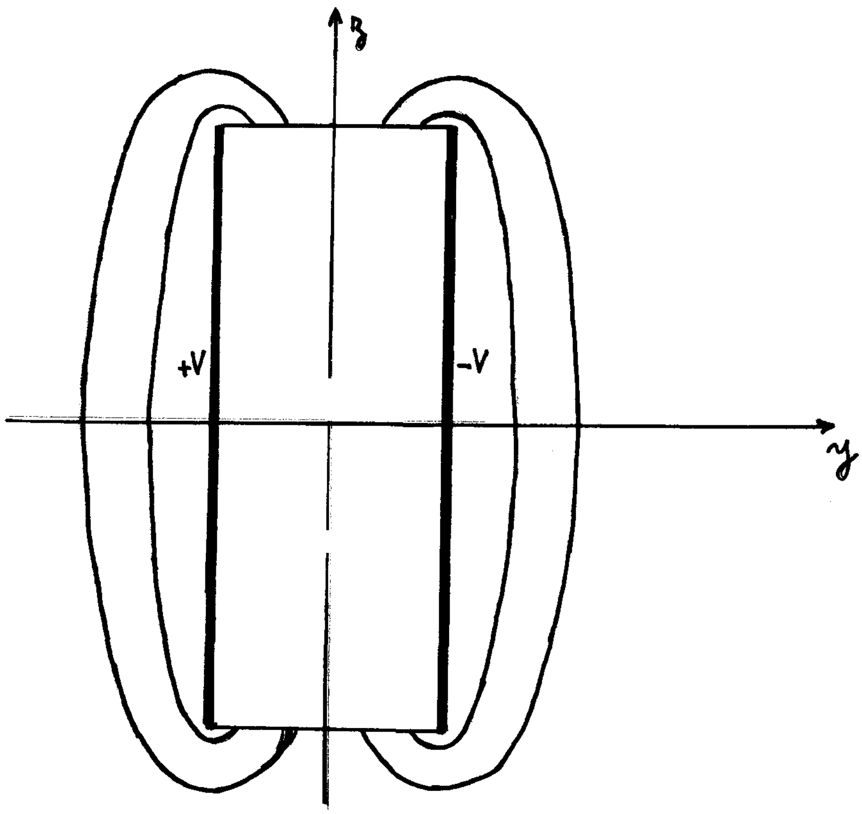
- pour le champ magnétique

  $\vec{B}_0$ est constant en tout point de l'espace.

- pour le champ électrique

  on calcule le champ créé en tout point de l'espace par deux conducteurs rectilignes parallèles, de longueur finie et portées respectivement aux potentiels $\pm$ V.

.../...



equipotentielle
électrique

Le calcul que l'on effectue en Annexe 3 montre que l'on obtient la combinaison de deux réseaux d'ellipsoïdes de révolution dont l'expression générale est :

$$* \; V\left(P(r,\theta,z)\right) = \frac{-V}{\mathcal{L}og\frac{2R}{a}} \; \mathcal{L}og\left[\frac{\left(\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l-z)^2}+z-l\right)}{\left(\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l+z)^2}+z+l\right)} \times \frac{\left(\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(l+z)^2}+l+z\right)}{\left(\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(l-z)^2}+z-l\right)}\right]$$

On en déduit le champ électrique :

$$* \; E_r = \frac{V}{2\mathcal{L}og\frac{2R}{a}}\left[\frac{(r-R\sin\theta)}{(r^2-2rR\sin\theta+R^2)}\left(\frac{l+z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l+z)^2}}+\frac{l-z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l-z)^2}}\right)-\ldots\ldots\right.$$

$$* \; E_\theta = \frac{-V}{2\mathcal{L}og\frac{2R}{a}}\left[\frac{R\cos\theta}{(r^2-2rR\sin\theta+R^2)}\left(\frac{l+z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l+z)^2}}+\frac{l-z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l-z)^2}}\right)+\ldots\ldots\right.$$

$$* \; E_z = \frac{V}{2\mathcal{L}og\frac{2R}{a}}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l+z)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(l-z)^2}}-\ldots\ldots\right.$$

.../...

où encore en coordonnées cartésiennes :

$$* \quad E_x = \frac{V}{\mathrm{Log}\frac{2R}{a}} \left[\frac{x}{(x^2+y^2-2yR+R^2)} \left(\frac{l+z}{\sqrt{x^2+y^2-2yR+R^2+(l+z)^2}} + \frac{l-z}{\sqrt{x^2+y^2-2yR+R^2+(l-z)^2}} \right) \right. \ldots$$

$$* \quad E_y = \frac{V}{\mathrm{Log}\frac{2R}{a}} \left[\frac{(y-R)}{(x^2+y^2-2yR+R^2)} \left(\frac{l+z}{\sqrt{x^2+y^2-2yR+R^2+(l+z)^2}} + \frac{l-z}{\sqrt{x^2+y^2-2yR+R^2+(l-z)^2}} \right) \right. \ldots$$

$$* \quad E_z = \frac{V}{\mathrm{Log}\frac{2R}{a}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2yR+R^2+(l+z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2yR+R^2(l-z)^2}} \right. \ldots$$

(lire les remarques concernant $\vec{E}$ en Annexe 2).

- Champ de vitesse

On retrowe l'expression classique de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre, soit sous forme complexe :

$$* \quad W(z) = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

ou encore :

$$* \quad U_x = 1 - R^2 \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$* \quad U_y = - \frac{2R^2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Nous allons maintenant faire le calcul aux ordres supérieurs, en considérant dans chaque cas vu la catégorie d'écoulement à laquelle nous nous intéressons :

* $\varepsilon = 0$ (justifiée par l'absence de singularité), ce qui revient comme nous l'avons fait entendre précédemment à négliger le courant dû à $\vec{u} \wedge \vec{B}$

.../...

2.4. EQUATIONS A L'ORDRE I

En identifiant les termes en I dans le développement, le système devient :

$$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_1^{01} = 0$$

$$* \ (\vec{u}_0\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}_1^{01} + (\vec{u}_1^{01}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1^{01} = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1^{01} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_1^{01} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_1^{01} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}_1^{01} = \vec{0}$$

donc :

$$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1^{01} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_1^{01} = \vec{0} \qquad \vec{E}_1^{01} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_p \implies \vec{E}_1^{01} = \vec{0}$$

de même :

$$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_1^{01} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}_1^{01} = \vec{0} \qquad \vec{B}_1^{01} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_p \implies \vec{B}_1^{01} = \vec{0}$$

Il reste donc le système :

$$* \ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_1^{01} = 0$$

$$* \ (\vec{u}_0\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}_1^{01} + (\vec{u}_1^{01}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1^{01} = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$$

Comme nous l'avons expliqué dans le début de cette seconde partie, nous allons rechercher une solution approchée dans le plan de symétrie d'équation $y = 0$.

Nous vérifions dans l'Annexe 4 que le terme $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$ est non conservatif c'est à dire $\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0) \neq 0$, donc nous aurons à l'ordre I une *perturbation du* champ *de vitesses*.

.../...

Le problème à résoudre devient donc le suivant : trouver $\vec{u}_1^{01}$ et p_1^{01} vérifiant :

$$* \quad (\vec{u}_0 . \vec{\nabla}) \vec{u}_1^{01} + (\vec{u}_1^{01} . \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1^{01} = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$$

$$* \quad \vec{\nabla} . \vec{u}_1^{01} = 0$$

$$* \quad \vec{u}_1^{01} = \vec{0} \ \text{ sur } \Gamma_\infty \qquad \text{et} \quad \vec{u}_1^{01} \vec{n} = 0 \ \text{ sur } \Gamma_p$$

où $\vec{u}_0$ n'est autre que la vitesse de l'écoulement à potentiel
Ce problème est traité dans la troisième partie par une méthode de type éléments finis, en passant par une formulation variationnelle faible.

2.5. EQUATIONS A L'ORDRE R_m

On identifie les termes en R_m dans le développement et il vient :

$$* \quad \vec{\nabla} . \vec{u}_1^{10} = 0$$

$$* \quad (\vec{u}_0 . \vec{\nabla}) \vec{u}_1^{10} + (\vec{u}_1^{10} . \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1^{10} = 0$$

avec comme condition aux limites : $\vec{u}_1^{10} = \vec{0}$ sur Γ_∞ et $\vec{u}_1^{10} . \vec{n} = 0$ sur Γ_p

$$\Longrightarrow \quad \vec{u}_1^{10} = \vec{0} \quad \text{et} \quad p_1^{10} = 0 .$$

d'autre part : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1^{10} = \vec{0}$ $\quad \vec{\nabla} . \vec{E}_1^{10} = 0$ $\quad \vec{E}_1^{10} = \vec{0}$ sur Γ_∞ $\Longrightarrow$ $\vec{E}_1^{10} = \vec{0}$

pour : $\vec{B}_1^{10}$ $\quad \vec{\nabla} . \vec{B}_1^{10} = 0$ $\quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1^{10} = \vec{E}_0$

.../...

correspond au champ magnétique induit par le courant dû à $\vec{E}_o$.
Le calcul de $\vec{B}_1^{10}$ est effectué en tout point de l'espace, en Annexe 3 et conduit aux expressions suivantes :

$$* \quad B_{1r}^{10} = 0 \qquad \text{pour } z = 0$$

$$* \quad B_{1\theta}^{10} = 0 \qquad \text{pour } z = 0$$

$$* \quad B_{1z}^{10} = \frac{+N}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \left[\frac{l^*}{\sqrt{r^2 - 2r\sin\theta + 1 + l^{*2}}}\ \mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r - \sin\theta}\right) + \frac{l^*}{\sqrt{r^2 + 2r\sin\theta + 1 + l^{*2}}}\ \mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r + \sin\theta}\right) \right]$$

$$\text{avec } l^* = \frac{l}{R}$$

Le développement en R_m n'a donc conduit qu'au calcul de $\vec{B}_1^{10}$, **champ** magnétique induit, par le courant dû à $\vec{E}_o$.
Nous pouvons pour affiner le raisonnement pousser le développement jusqu'à l'ordre IR_m.

2.6. EQUATIONS A L'ORDRE IR_m

On identifie les termes mixtes d'ordre IR, dans le développement et il vient :

$$* \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1^{11} = 0$$

$$* \quad (\vec{u}_o \cdot \vec{\nabla})\, \vec{u}_1^{11} + (\vec{u}_1^{11} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{u}_o + (\vec{u}_1^{10} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{u}_1^{01} + (\vec{u}_1^{01} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{u}_1^{10} + \vec{\nabla} p_1^{11} = \vec{E}_o \wedge \vec{B}_1^{10} + \vec{E}_1^{10} \wedge \vec{B}_o$$

$$* \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1^{11} = \vec{E}_1^{01} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1^{11} = 0$$

$$* \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1^{11} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1^{11} = 0$$

.../...

avec les Vecteurs $\vec{A}_1^{11}$ qui représentent les termes d'ordre IR_m dans le développement de $\vec{A}$ $(\vec{A} = \vec{U}, \vec{E}, \vec{B})$; A_1^{10} représente le temre en R_m, et A_1^{01} le terme en I.

$$* \quad \vec{\nabla}_\wedge \vec{E}_1^{11} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla} . \vec{E}_1^{11} = 0 \qquad \vec{E}_1^{11} = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \Rightarrow \vec{E}_1^{11} = 0$$

Nous avons vu au paragraphe 2.4. que :

$$* \quad \vec{E}_1^{01} = \vec{0}$$

donc :

$$* \quad \vec{\nabla}_\wedge \vec{B}_1^{11} = \vec{E}_1^{01} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla} \vec{B}_1^{11} = 0 \qquad \vec{B}_1^{11} = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty \Rightarrow \vec{B}_1^{11} = 0$$

D'autre part, nous avons vu au paragraphe 2.5. que :

$$* \quad \vec{U}_1^{10} = \vec{0}$$

il reste donc le système suivant :

$$* \quad \vec{\nabla} \vec{U}_1^{11} = 0$$

$$* \quad (\vec{U}_o . \vec{\nabla}) \vec{U}_1^{11} + (\vec{U}_1^{11} . \vec{\nabla}) \vec{U}_o + \vec{\nabla} p_1^{11} = \vec{E}_o \wedge \vec{B}_1^{01}$$

avec : $\vec{U}_1^{11} = \vec{0}$ sur Γ_∞ et $\vec{U}_1^{11} . \bar{n} = 0$ sur Γ_p

avec $\vec{B}_1^{10}$ qui est le champ magnétique induit dont l'expression est donnée au paragraphe 2.4.

Comme au paragraphe 2.3. nous cherchons une solution dans le plan de symétrie d'équation $z = 0$.

.../...

Nous vérifions en Annexe 4 que le terme $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}$ est non conservatif $\left(\vec{\nabla} \wedge (\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}) \neq \vec{0}\right)$, donc à l'ordre IR_m, nous aurons une perturbation do champ de vitesses.

Le problème à résoudre est donc le suivant : trouver $\vec{u}_1^{11}$ et p_1^1 vérifiant :

$$* \quad (\vec{u}_0 . \vec{\nabla})\, \vec{u}_1^{11} + (\vec{u}_1^{11} . \vec{\nabla})\, \vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1^{11} = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}$$

$$* \quad \vec{\nabla} . \vec{u}_1^{11} = 0 \qquad \text{avec} \quad \vec{u}_1^{11} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_\infty \text{ et } \vec{u}_1^{11} . \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_p$$

On remarque que l'on a exactement le même sytème à résoudre qu'au 2.4, seul le second membre change. Nous pouvons donc résoudre les deux systèmes en n'élaborant qu'un seul programme d'éléments finis, où pour chaque système nous rentrerons le second membre qui lui est propre.

La résolution numérique de ce problème est abordée dans la troisième partie.

2.7. SOLUTION ANALYTIQUE FINALE

En se limitant aux développements d'ordre 1, en I et R_m, plus le terme mixte en IR_m, on obtient donc la solution analytique approchée suivante :

$$* \quad \vec{u} = \vec{u}_0 + I\, \vec{u}_1^{01} + I R_m\, \vec{u}_1^{11}$$

$$* \quad p = p_0 + I\, p_1^{01} + I R_m\, p_1^{11}$$

$$* \quad \vec{E} = \vec{E}_0$$

$$* \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + R_m\, \vec{B}_1^{10}$$

.../...

- Remarque

Comme nous avons pris $R_m \ll 1$, on peut donc prévoir avant la résolution numérique que la perturbation engendrée par les termes d'ordre I sera prépondérante devant celle engendrée par les termes d'ordre $\mathbb{R}_m$. Il est cependant intéressant d'étudier la contribution des termes d'ordre $\mathbb{R}_m$.

- Conclusion

Compte tenu des conditions d'études et des hypothèses que nous avons faites dans cette deuxième partie, nous avons vu que l'on obtenait une perturbation du champ de vitesses. Reste, dans la troisième partie, à aborder la résolution numérique.

.../...

- 3ème Partie -

Résolution numérique

-=-=-=-=-=-

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

-=-=-=-=-

1. HYPOTHÈSES DE TRAVAIL ET MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Le champ de forces non conservatif introduit dans la seconde partie, a permis de mettre en évidence la possibilité de l'existence d'une perturbation des lignes de courant. Il reste donc maintenant à aborder par la résolution numérique l'aspect qualitatif de cette perturbation.

Les développements à l'ordre I et IR_m ont conduit à deux systèmes de la même forme avec seulement le second membre qui change, c'est à dire :

Il faut trouver $\vec{u}$ et p vérifiant :

* $(\vec{U}_0 . \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} . \vec{\nabla})\vec{U}_0 + \vec{\nabla} p = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}$

  avec $\vec{B} = \vec{B}_1$ pour le développement en IR

  et $\vec{B} = \vec{B}_1^{10}$ pour le développement en IR_m

* $\vec{\nabla} \vec{u} = 0$

* $\vec{u} = \vec{0}$ sur Γ_∞ , $\vec{u} . \vec{n} = 0$ sur Γ_p

$\vec{U}_0$, $\vec{E}_0$, $\vec{B}$ étant des fonctions connues.

Des considérations physiques (conditions aux limites, non évolution temporelle, ...) nous ont conduit à supposer qu'il s'agit d'un problème élliptique. Nous avons alors à résoudre un système du ler ordre elliptique dont la mise sous formulation variationnelle et la discrétisation sont classiques.

.../...

L'existence de la solution peut être vérifiée a posteriori (par comparaison avec l'expérience) mais la convergence reste un point à approfondir, et ne sera pas abordé ici. Car même si le système est **elliptique**, la discrétisation sous forme de système du 1er ordre est incertaine quant à la convergence.

Nous allons traiter ce problème par une méthode de type éléments finis en passant par une formulation faible. En adoptant les conventions d'Einstein, le problème se met sous la forme :

* $a_i u_{j,i} + u_i a_{j,i} + p_{,j} = f_j$
  avec a_i composantes de $\vec{V_0}$ (1)

* $u_{i,i} = 0$

* $\vec{u} = \vec{0}$ sur Γ_∞

* $u_i n_i = 0$ sur Γ_p

Ou en mettant l'équation (1) sous forme conservative :

* (1) $\Leftrightarrow$ $(a_i u_j + a_j u_i)_{,i} + p_{,j} = f_j$ (1') $j = 1,2$

car $(a_i u_j + a_j u_i)_{,i} = a_{i,i} u_j + a_i u_{j,i} + a_{j,i} Di + a_j u_{i,i}$

Comme $a_{i,i} = 0$ et $u_{i,i} = 0$ l'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (1') est démontrée.

Le problème sera donc étudié sous la forme conservative suivante :

. trouver $\vec{u}$ et p tels que :

* $(a_i u_j + a_j u_i)_{,i} + p_{,j} = f_j$ $j = 1,2$

* $u_{i,i} = 0$

* $\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & \text{sur } \Gamma_\infty \\ u_i n_i = 0 & \text{sur } \Gamma_p \end{cases}$

.../...

- Formulation faible :

Soit $v \in [H_A(\Omega)]^2$, on multiplie chaque membre de l'équation par Zr(on intégre sur Ω et on obtient :

$$* \int_\Omega (a_i u_j + a_j u_i)_{,i} v_j \, dx + \int_\Omega P_{,j} v_j \, dx = \int_\Omega f_j v_j \, dx$$

puis on intégre par parties (Green) :

$$* \int_\Omega (a_i u_j + a_j u_i)_{,i} v_j \, dx = -\int_\Omega (a_i u_j + a_j u_i) v_{j,i} \, dx$$

$$+ \int_{\delta\Omega} (a_i u_j + a_j u_i) v_j n_j \, d\sigma \qquad \text{avec } \delta\Omega = \Gamma_\infty \cup \Gamma_p$$

donc :

$$* \int_{\delta\Omega} (a_i u_j + a_j u_i) v_j n_j \, d\sigma = \underbrace{\int_{\Gamma_p} \text{"} \, d\sigma}_{(A)} + \underbrace{\int_{\Gamma_\infty} \text{"} \, d\sigma}_{(B)}$$

Nous avons, d'autre part :

$$* (a_i u_j + a_j u_i) v_j n_i = a_i n_i u_j v_j + a_j v_j u_i n_i$$

comme : $\vec{u} = \vec{0}$ sur $\Gamma_\infty \Rightarrow (B) \equiv 0$

de même : $a_i n_i = 0$ et $u_i n_i = 0$ sur $\Gamma_p \Rightarrow (A) \equiv 0$

donc :

$$* \int_\Omega (a_i u_j + a_j u_i)_{,i} v_j \, dx = -\int_\Omega (a_i u_j + a_j u_i) v_{j,i} \, dx$$

.../...

On fait une intégration par parties pour $\dot{}$ aussi :

$$* \int_{\Omega} p_{,j} v_j \, dx = -\int_{\Omega} p \, v_{j,j} \, dx + \int_{\delta\Omega} p \, v_j \, n_j \, d\sigma$$

La formulation faible du problème s'écrit donc :

Trouver $u \in [H_1(\Omega)]^2$ et $p \in H_1(\Omega)$ tels que :
$* \ \forall v \in [H_1(\Omega)]^2$
$* \ \int_{\Omega} (a_i u_j + a_j u_i) v_{j,i} \, dx + \int_{\Omega} p \, v_{j,j} \, dx = -\int_{\Omega} f_j v_j \, dx + \int_{\delta\Omega} p \, v_j n_j \, d\sigma$
avec la contrainte $u_{i,i} = 0$

Pour résoudre ce problème, on utilise une méthode classique d'éléments finis qui est développée en Annexe 5.

Dans la suite, les résultats numériques sont interprétés sur un plan strictement qualitatifs ; en effet, si ces résultats sont globalement en accord avec diverses expériences, nous ne pouvons en tirer des conclusions quantitatives et locales.

Le programme n'ayant pas été validé, les résultats n'étant pas satisfaisants près des frontières, on considérera cette partie comme une première approche numérique du problème qui confirme les résultats escomptés après l'étude théorique précédente.

2. Choix du maillage

L'étude des configurations hydrodynamiques et électromagnétiques met en évidence l'existence d'un axe de symétrie $(x'x)$ ce qui conduit, par soucis d'économie au choix d'un demi-maillage (planche n° 1).

.../...

Les noeuds du maillage, répartis sur des 1/2 circonférences concentriques sont délibérement concentrés près du cylindre car cette zone, où les forces de volumes sont importantes, est évidemment le siège des plus grandes perturbations.

3. RÉSULTATS À L'ORDRE I

3.1. CHAMP DE FORCE

A cet ordre, le calcul du second membre est relativement simple puisqu'il nécessite l'expression du champ électrique créé par les deux électrodes de longueur finie et du champ magnétique appliqué.

Une bonne connaissance de l'allure des lignes de champ du champ électrique induit dont on a obtenu une définition analytique, nous a paru une bonne occasion pour tester les programmes de tracé (planche n° 2).

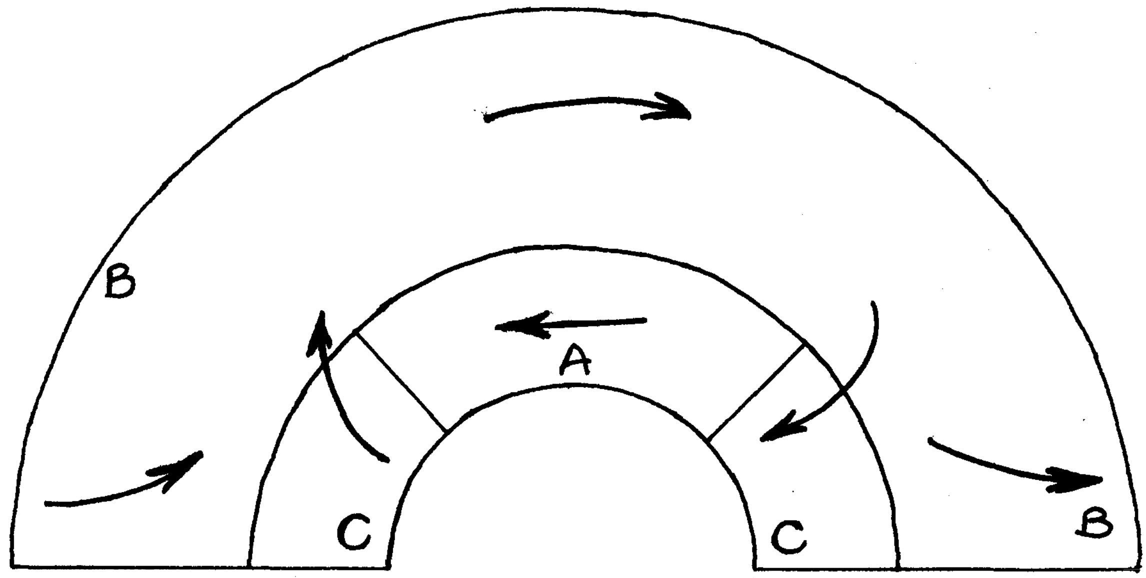
Le champ de force est obtenu par multiplication vectorielle des champs électrique et magnétique. La variation du signe du champ magnétique appliqué permet d'obtenir deux configurations intéressantes du champ de force : accélération ou décélération sur l'axe $y'y$.

3.2. VITESSES DE PERTURBATION

Nous avons vu que le champ de force est important près du cylindre (champ en 1/R) et plus particulièrement près de l'électrode qui est un point singulier.

Pour interpréter le champ de perturbation, nous avons divisé le demi-espace en 3 zones d'influence où vitesse due au champ de force et vitesse U_∞ appliquée jouent un rôle particulier ; le couplage entre (u, v) et U_∞ apparaît dans les équations par la présence de termes du type :

* $V_i \dfrac{\partial u_r}{\partial x_i}$



Prenons le cas du champ magnétique positif(dirigé vers le "haut"). Dans la zone A, le champ de force est dirigé vers l'amont ; cette zone, proche de l'électrode est soumise à des forces de volume importantes qui définissent le sens des vitesses de perturbation, soit vers l'amont.

Dans la zone B, les forces de volume sont négligeables devant les forces d'inertie due à la vitesse U_∞ , c'est donc la vitesse infinie qui impose le sens du champ de vitesse = dirigé vers l'aval.

Une zone particulière, la zone C met en concurrence vitesse induite par le champ de force et vitesse infinie ; le couplage (u,v) et U_∞ y est très important et explique en partie les mauvais résultats obtenus dans cette région et en particulier aux points d'arrêts.

La continuité des composantes du vecteur vitesse fait apparaître des lignes de courant que l'on peut assimiler à celles d'un tourbillon centré en un point de l'axe $y'y$ car :

- l'écoulement à potentiel (U_0,V_0) est symétrique / $y'y$
- le champ de force en module est symétrique / $y'y$

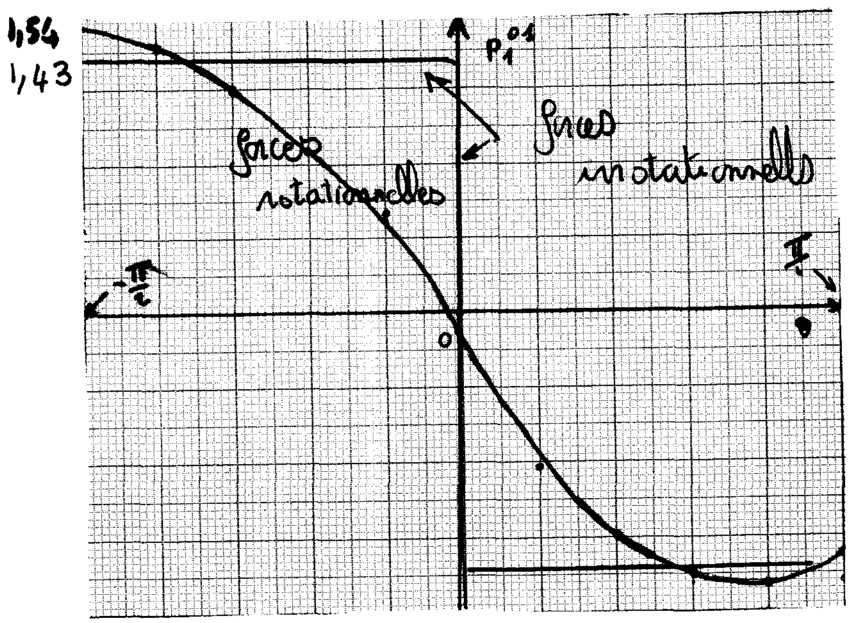
.../...

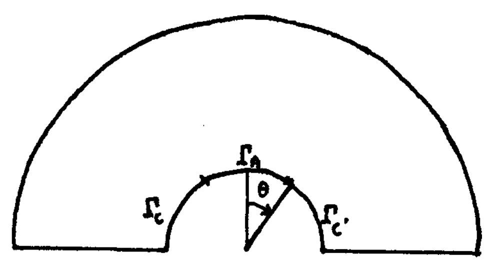
Les résultats à cet ordre permettent déjà de prévoir l'influence de ce champ de force sur l'écoulement ; l'écoulement résultant est étudié dans le paragraphe vitesse totale.

3.3. PRESSION DE PERTURBATION

Etudions particulièrement la répartition de pression sur le cylindre. Rappelons que pour la discrétisation, la pression est prise constante sur tout le triangle. Donc, malgré la finesse du maillage, près du cylindre l'expression "sur le cylindre" ne doit pas faire oublier l'imprécision due à la méthode de discrétisation.

Les résultats obtenus "sur" le cylindre sont visualisés sur la courbe ci-dessous :

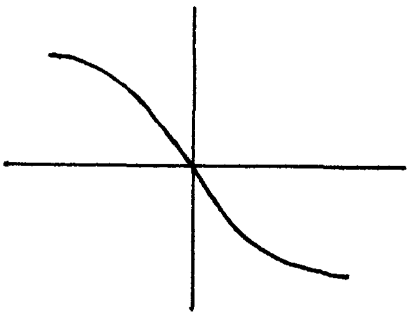




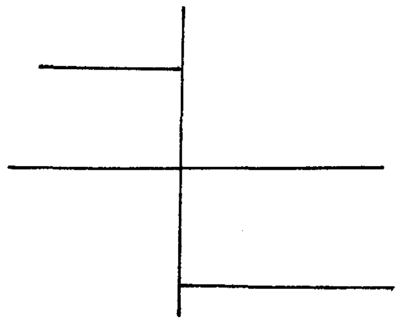
Au niveau de la précision, on peut dire que compte tenu des remarques précédentes, celles-ci est assez bonne, mise à part la "remontée" de la courbe que l'on observe pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, et la différence en valeur absolue des extrema (1,54 contre - 1,45).

.../....

On obtient une perturbation du champ de pression de la forme :



au lieu de



pour le champ de forces irrotationnel

Cette situation, plus conforme à l'expérience, s'explique par le caractère non conservatif du champ de force. En effet, la forme particulière du théorème de Bernouilli présentée au paragraphe 3.2.1. de la première partie n'est pas applicable ici et la perturbation du champ de vitesse engendrée par ce champ de forces entraîne une décroissance de la perturbation du champ de pression, par rapport au cas de la force irrotationnelle.

Sur l'arc Γ_c , la perturbation est positive ; cette région connaît donc une compression, compression d'autant plus importante que l'on se rapproche du point d'arrêt 1.

Sur l'arc Γ_A , la pression de perturbation est faible et s'annule sur l'axe de symétrie $y'y$.

La perturbation de pression sur le cylindre est une fonction impaire de l'angle θ .

L'arc $\Gamma_{c'}$ est soumis à une dépression qui devrait devenir maximale au point d'arrêt 2, ce qui n'est pas le cas. Donc, dans cette zone nous obtenons de mauvais résultats pour des raisons que nous avons déjà cité au paragraphe 3.2.

.../...

4. RÉSULTATS À L'ORDRE DE IR_M

Contrairement à l'ordre I, le calcul du second membre est particulièrement difficile. La force de volume à l'ordre IR_m est donnée par le produit vectoriel du champ électrique $\vec{E}_o$ et du champ magnétique induit $\vec{B}_1^{10}$. Le calcul de B_1^{10} développé en Annexe 3, devient complexe car le problème électromagnétique dans le cas des électrodes de longueur finie est tridimensionnel.

L'étude à cet ordre a été faite par soucis de rigueur et corrobore les résultats précédents ; Vais, sur le plan quantitatif, apporte peu d'informations car il s'agit d'un ordre supérieur, et de plus expérimentalement $R_m << I$.

5. VITESSE ET PRESSION RÉSULTANTE

Pour obtenir vitesse et pression totales, il suffit de revenir au développement asymptotique et de faire la somme terme à terme :

$$* \quad \vec{u} = \vec{u}_o + I\,\vec{u}_1^{\,01} + IR_m\,\vec{u}_1^{\,11}$$

$$* \quad p = p_o + I\,p_1^{01} + IR_m\,\vec{p}_1^{\,11}$$

5.1 . VITESSE RESULTANTE

Se reporter à la planche n° 5

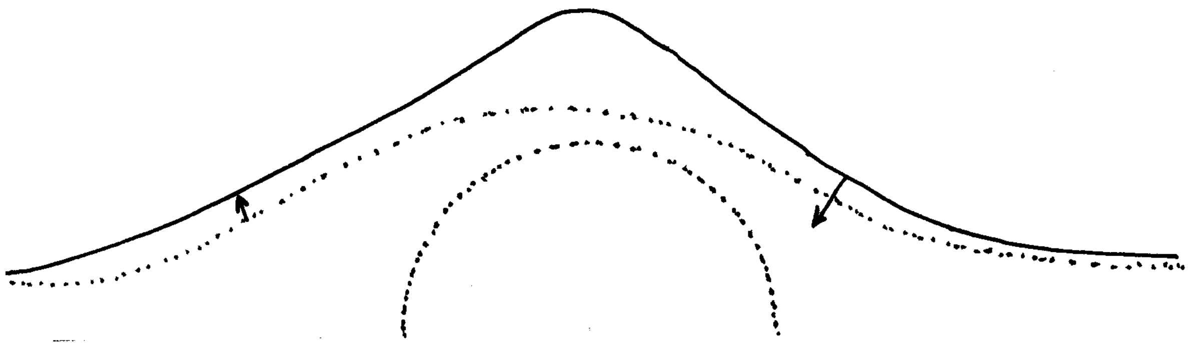
Le vecteur vitesse ordre 0 (écoulement potentiel) est représenté par la flèche $\times\!\!\longrightarrow$

le vecteur vitesse résultant par la flèche $\times\!\!\longrightarrow\!\triangleright$

A l'amont du cylindre, le fluide subit un effet que l'on peut qualifier effet centri'fuge : entraînant un ralentissement du fluide et un infléchissement des lignes de courant.

.../...

A l'aval, un effet "centripète" tend à resserrer les lignes de courant.



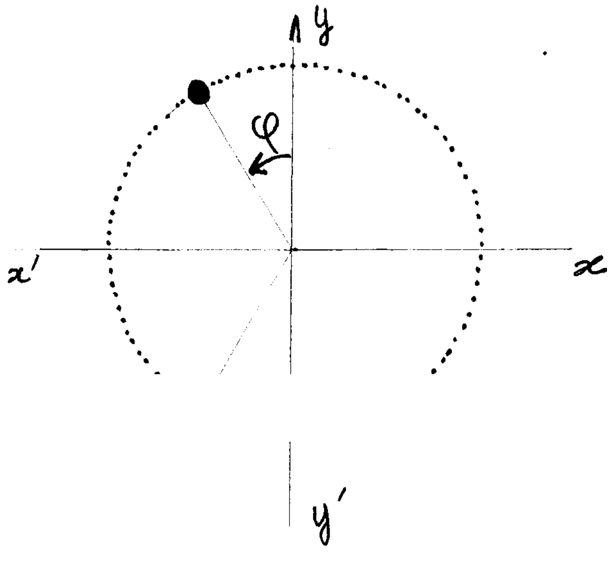
5.2. PRESSION RESULTANTE

Si l'on considére la répartition résultante du champ de pression, il apparaît après intégration sur la totalité de la circonférence du cylindre une force supplémentaire. Avec la configuration du champ de force choisie ($\vec{B} = +\vec{k}$) la force est dirigée vers l'aval et tend donc à augmenter la trainée.

Il suffit de changer le sens de $\vec{B}$ pour inverser le sens de cette force ; on obtient alors une force de type propulsif.

6. AUTRES CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES

Il nous est apparu intéressant d'étudier l'influence de la position des électrodes sur le centre du tourbillon obtenu à l'ordre 1 :



.../...

Lorsque l'angle φ augmente, le tourbillon se déplace vers l'amont. Ceci est intéressant sur le plan physique mais aussi sur le plan numérique : une modification du champ de force influe sur le champ de vitesse de façon prévisible.

Remarque :

Tous les tracés correspondant à ces différents cas de figures sont en Annexe 6.

7. CONCLUSION

La résolution numérique, puis sa visualisation par l'intermédiaire du programme de tracé BENSON, nous a permis de mettre nettement en évidence, aux ordres I et IR_m l'apparition de perturbations à caractère tourbillonnaire. Toutefois, il faut remarquer certaines imperfections des résultats numériques (vitesses de perturbations non tangente en tous points à la paroi du cylindre, et non nulle aux points d'arrêts) nécessitent une révision du programme.

Il est nécessaire aussi de réorganiser la matrice afin de la rendre bande et pouvoir ensuite travailler sur un maillage plus fin pour améliorer la précision ; c'est la tâche à laquelle nous nous consacrons actuellement.

-=- CONCLUSION -=-

CONCLUSION

Le présent travail a permis de mettre en évidence l'influence d'un champ de force de Laplace particulier et non conservatif sur les lignes de courant d'un écoulement de fluide incompressible conducteur et non visqueux autour d'un cylindre.

En effet, alors qu'un champ de force irrotationnel ne conduit à aucune modification des champs de vitesses, nous avons dans le cas présent l'apparition de perturbations à caractère tourbillonnaire.

De même, la perturbation de pression statique à la paroi, due à la présence de l'écoulement induit par les forces de volume non conservatives, est plus faible que dans le cas du cylindre infini (forces irrotationelles).

Toutefois, il faut remarquer que certaines imperfections des résultats numériques (vitessses de perturbations non tangentes en tout point à la paroi, et non nulle aux points d'arrêts) nécessitent une révision et une validation du programme de calcul de façon à lever toute ambiguité quant à la précision des résultats.

Enfin, compte tenu du cadre des hypothèses de cette étude (fluide parfait incompressible), il serait très intéressant d'étudier le calcul dans le cas d'un fluide visqueux, ce qui permettrait de faire un pas décisif vers une description plus fidèle de la réalité.

-•- ANNEXES -•-

- ANNEXE 1 -

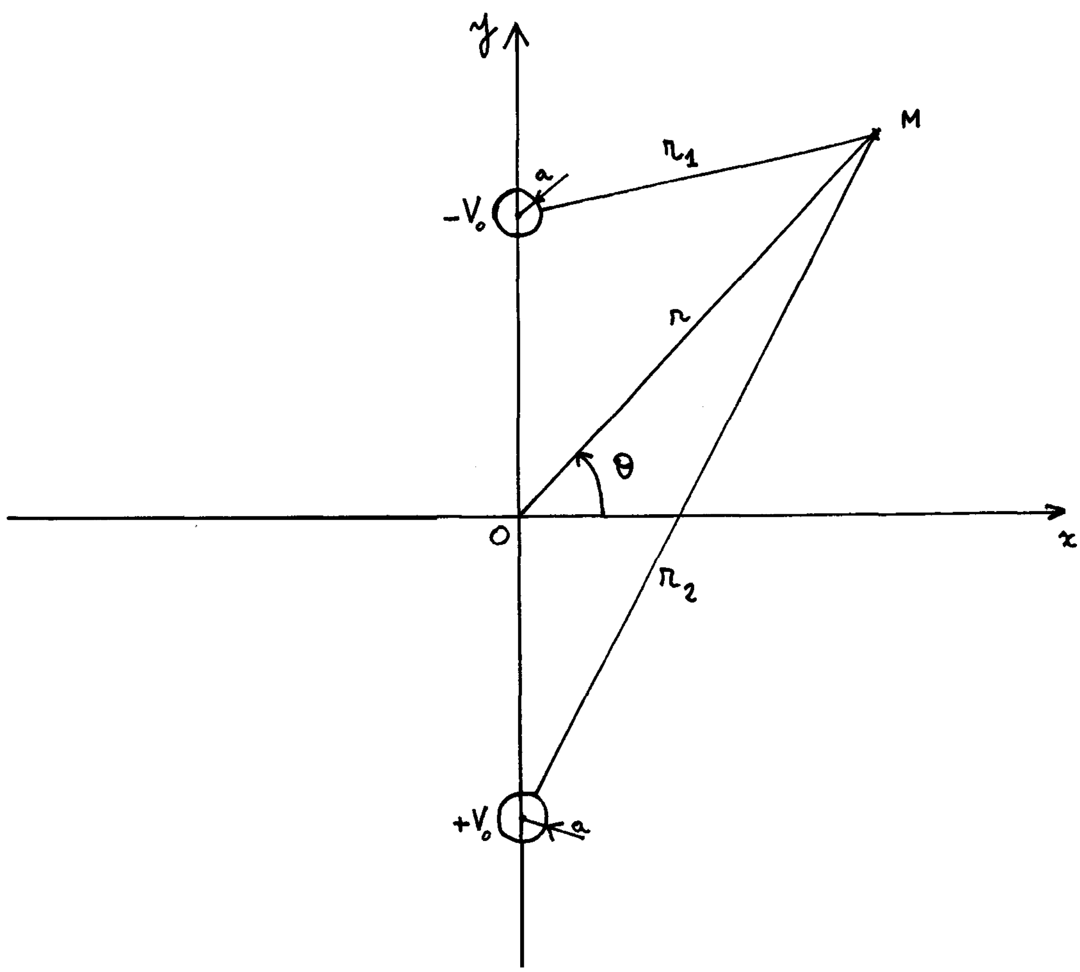
-=-=-=-=-

CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR DEUX ÉLECTRODES DE POTENTIELS OPPOSÉS ET DE LONGUEURS INFINIES

-=-=-=-=-

ANNEXE 1 -

CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR DEUX ÉLECTRODES DE POTENTIELS OPPOSÉS ET DE LONGUEURS INFINIES -

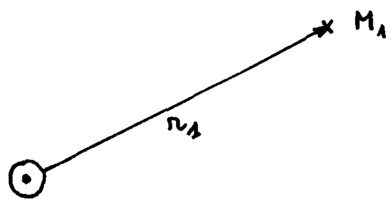


Hypothèses : - rayon des électrodes

$a << R$

- électrodes de longueur infinie

• <u>Pour une seule électrode</u> :



L'expression générale du potentiel est :

$$V = + K \log \frac{L}{r_1}$$

Les conditions aux limites étant : $V_1 = - V_0$ pour $r_1 = a$
et $V = 0$ pour $r_1 = 2R$ (ceci pour rendre possible la superposition),
il vient donc :

$$* \quad V_1 = - \frac{V_0}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \mathrm{Log}\,\frac{2R}{r_1}$$

soit dans le repère Oxy :

$$* \quad V_1(r_1) = - \frac{V_0}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \mathrm{Log}\left(\frac{4R^2}{r^2 + R^2 - 2rR\sin\theta}\right)$$

de même, pour la seconde électrode, nous avons :

$$* \quad V_2(r_2) = + \frac{V_0}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \mathrm{Log}\left(\frac{4R^2}{r^2 + R^2 + 2rR\sin\theta}\right)$$

.../...

• Après superposition, en rappelant que : $a \ll 2R$

$$\boxed{V(r) = -\frac{V_0}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\;\mathrm{Log}\left(\frac{r^2+R^2+2rR\sin\theta}{r^2+R^2-2rR\sin\theta}\right)}$$

• Expression du champ électrique $\vec{E}$

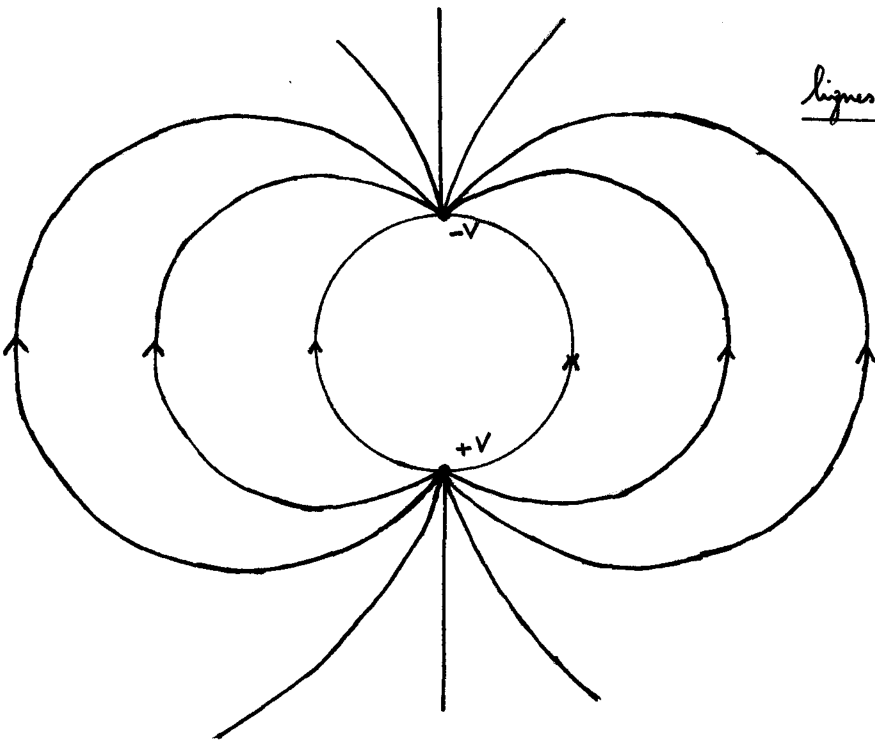
Nous avons :

$*\quad \vec{E} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$

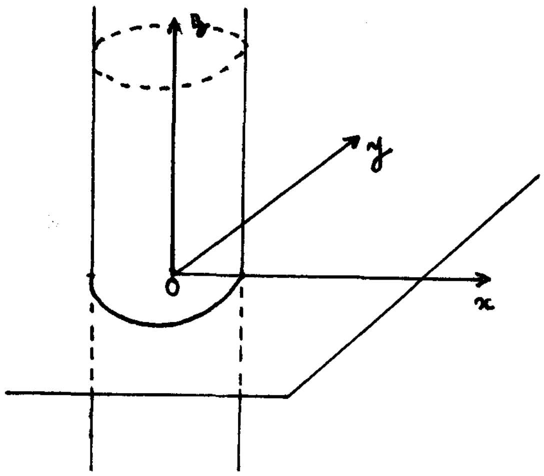
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{V}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\;\frac{2R\sin\theta\,(R^2-r^2)}{(r^2+R^2)^2-4r^2R^2\sin^2\theta}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{V}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\;\frac{2R\cos\theta\,(R^2+r^2)}{(r^2+R^2)^2-4r^2R^2\sin\theta}$$

lignes de champ :



CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE INDUIT PAR LA DISTRIBUTION DE COURANT AUTOUR DU CYLINDRE -



Le cylindre étant de longueur infinie, on peut supposer yue Xe courant j est dam un plan perpendiculaire **aux** *génératrices et donc que le champ induit est dirigé selon* **Oz.**

Nous avons donc :

$$* \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}_i^* = \vec{E}^* \qquad \text{avec} \qquad \vec{B}_i^* = B_{iz}^*\ \vec{k}$$

Il vient donc :

$$* \quad -\frac{\partial B_{iz}^*}{\partial r} = E_\theta^* = \frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \; \frac{\text{? R'dB}\ (R^2+r^2)}{(r^2+R^2)^2 - 4r^2R^2\sin^2\theta}$$

$$* \quad \frac{1}{r}\,\frac{\partial B_{iz}^*}{\partial \theta} = E_r^* = \frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \; \frac{2R\sin\theta\,(R^2-r^2)}{(r^2+R^2)^2 - 4r^2R^2\sin^2\theta}$$

Il vient donc après intégration :

$$\boxed{\begin{aligned} B_{iz} &= -\frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{r+\sin\theta}{\cos\theta} + \mathrm{Arctg}\,\frac{r-\sin\theta}{\cos\theta} - \pi\right) \text{ pour } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\\ B_{iz} &= -\frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\left(\mathrm{Arctg}\,\frac{r+\sin\theta}{\cos\theta} + \mathrm{Arctg}\,\frac{r+\sin\theta}{\cos\theta} + \pi\right) \text{ pour } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}}$$

.../...

En particulier, sur Re cylindre, nous avons (pour $r = R$) :

$$* \quad B_{z\,cyl} = \frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \left(\mathrm{Arctg}\,\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \mathrm{Arctg}\,\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} + \varepsilon\pi \right) \qquad \varepsilon = \pm 1$$

En prenant en : $\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2} = t$ il vient :

$$* \quad B_{z\,cyl} = - \frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \left(\mathrm{Arctg}\,\frac{1-t}{1+t} + \mathrm{Arctg}\,\frac{1+t}{1-t} + \varepsilon\pi \right)$$

Comme : $\mathrm{Arctg}\,x + \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ hi $x > 0$

$= -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$

donc :

$$* \quad B_{z\,cyl} = \frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \times \left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{pour} \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

$$* \quad B_{z\,cyl} = \frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{pour} \quad \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$$

donc B_z est bien constant sur Re cylindre.

o Remarque concernant l'ensemble de calculs :

P o u R u calculs des champs électrique et magnétique, ROM n'avons p u tenu compte de la présence du cylindre isolant. Toutefois, Re cylindre étant une équipotentielle ($E_r = 0$ pour $z = R$), Ra présence de l'isolant ne modifiera p u Ra forme des lignes de champs et des lignes de forces ; mais en changeant uniquement la résistance globale de l'ensemble, elle n'aura d'effets que sur Re module de c u vecteurs. Il n' est pas nécessaire de tenir compte de l'isolant dans c u calculs, cela nécessitant une étude longue et complexe.

- ANNEXE 2 -

-=-=-=-=-

RAPPELS CONCERNANT LES ÉCOULEMENTS À POTENTIEL DE VITESSE EN FLUIDE PARFAIT : SOLUTION POUR LE CAS DU CYLINDRE INFINI

-=-=-=-=-

ANNEXE 2 -

RAPPELS CONCERNANT LES ÉCOULEMENTS À POTENTIEL DE VITESSE EN FLUIDE PARFAIT : SOLUTION POUR LE CAS DU CYLINDRE INFINI -

- *Ecoulement plan irrotationnel et incompressible d'un fluide parfait*

- *Si l'écoulement est irrotationnel* :

* $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

relation qui montre que ($u\,dx + v\,dy$) *est une différentielle exacte.*

* $u\,dx + v\,dy = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = d\phi$

* $\phi(x,y)$ = *fonction de potentiel*

- *Si l'écoulement est incompressible* :

* $\mathrm{div}\ \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

relation qui montre que ($u\,dy - v\,dx$) *est une différentielle exacte* :

* $u\,dy - v\,dx = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$

* $\psi(x,y)$ = *fonction de courant*

.../...

A partir de ces deux fonctions, on a la fonction de potentiel complexe :

x $df = d\phi + i\,d\Psi = W(z)\,dz$

*

$$\boxed{f(z) = \phi(x,y) + i\,\Psi(x,y) = \int W(z)\,dz.}$$

où :

* $W(z) = \dfrac{df}{dz}$ est la vitesse complexe de l'écoulement.

• Ecoulement autour d'un cylindre circulaire indéfini

Considérons l'écoulement résultant de la superposition d'un écoulement uniforme, parallèle à l'axe des x, dont le potentiel complexe peut s'écrire $U_\infty z$ et d'un doublet plan à l'origine, parallèle à L'axe des x dont le potentiel complexe est mis sous la forme : $U_\infty R^2/z$

D'après le principe de superposition, le potentiel complexe résultant a pour expression :

* $$f(z) = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$

Il peut s'écrire :

* $$\phi + i\,\Psi = U_\infty \left(x + iy + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$= U_\infty\, x\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) + i\,U_\infty\, y\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$$

Donc le potentiel et Ra fonction courant sont respectivement :

$$* \quad \phi = U_\infty \, x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = U_\infty \cos\theta \left(r + \frac{R^2}{r}\right)$$

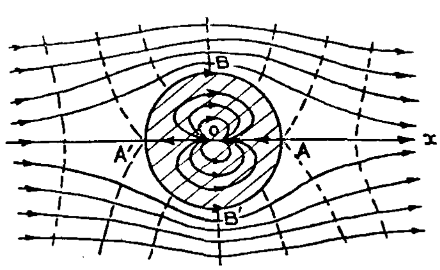
$$* \quad \Psi = U_\infty \, y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = U_\infty \sin\theta \left(r - \frac{R^2}{r}\right)$$

En un point d'affixe z, Ra vitesse complexe est donnée par :

$$* \quad W(z) = \frac{df}{dz} = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)$$

La ligne de courant particulier $\Psi = 0$ est consituée par l'axe des x et par le cercle de rayon R ayant pour centre l'origine. Aux deux points d'affixe : $z = +R$ et $z = -R$, la vitesse est nulle ; ce sont deux points d'arrêt.

L'expression de $W(z)$ montre que on du segment A'A , Ra vitesse est positive, alors qu'elle est négative sur le segment A'A . On peut donc considérer que Ra ligne de courant $\Psi = 0$ est constituée par l'axe des x , sauf Ra portion A'A où cette ligne se dédouble en deux demi-cercles de hayon R:



Les lignes de courant situées à l'intérieur du cercle de rayon R se ferment sur elles-mêmes, de sorte qu'une particule fluide intérieure reste à l'intérieur ; de même, une particule extérieure au cercle reste toujours à l'extérieur. On peut donc remplacer le cercle de rayon R, qui est ligne de courant, par un solide fixe de même contour.

La vitesse en un point de coordonnées cylindriques r et θ , s'obtient à partir de l'expression du potentiel :

$$* \quad u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$* \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - U_\infty \sin\theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

En particulier, pour un point de la circonférence ($r = R$), on a :

$* \quad u_r = 0$ et $u_\theta = -2U_\infty \sin\theta$.

La vitesse est maximale aux points B et B', où elle est égale au double de la vitesse à l'infini. D'autre part, la répartition des pressions étant symétrique par rapport à l'origine, la résultante des pressions sur le cercle est nulle. Ainsi, la force aérodynamique qui s'exerce sur le cylindre infini est nulle ; nous retrouvons le paradoxe de d'Alembert.

- ANNEXE 3 -

-=-=-=-=-

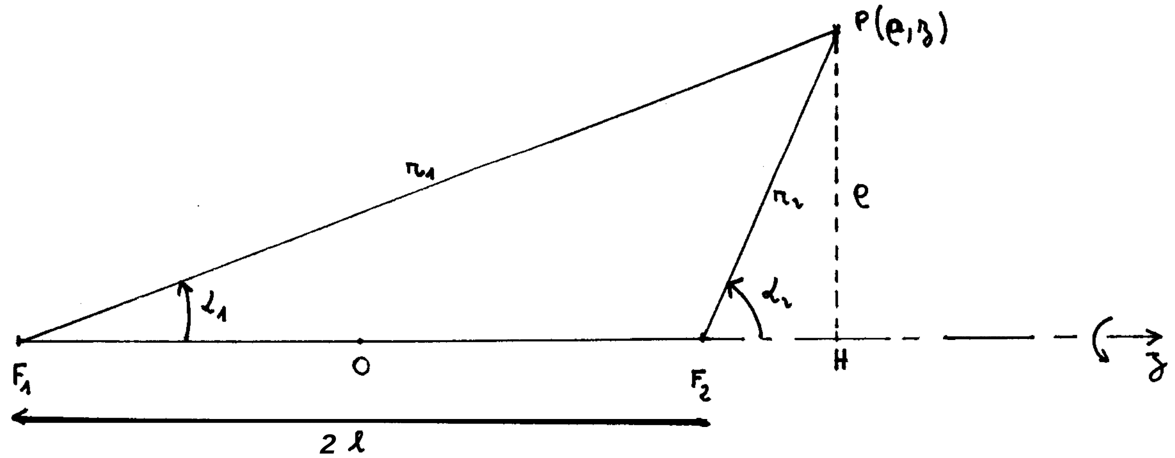
CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR DEUX ÉLECTRODES DE POTENTIELS OPPOSÉS ET DE LONGUEURS FINIES 2 L -

-=-=-=-=-

ANNEXE 3 -

CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR DEUX ÉLECTRODES DE POTENTIELS OPPOSÉS ET DE LONGUEURS FINIES 2 L -

Nous allons rechercher Le champ créé par une électrode de longueur 2l.



Avec L a notations de la figure ci-dessus, Le potentiel en un point $P(e,z)$ *a pour expression :*

$$* \; V_1(P) = K \int_{-l}^{+l} \frac{d\zeta}{\sqrt{e^2+(z-\zeta)^2}} = -K \Big[\mathrm{Log} \big[z - \zeta + \sqrt{e^2+(z-\zeta)^2} \big] \Big]_{\zeta=-l}^{\zeta=+l}$$

.../...

d'où :

$$* \quad V_1(P) = -K \, \mathcal{L}og \left\{ \frac{r_2 + z - \ell}{r_1 + z + \ell} \right\} = -K \, \mathcal{L}og \left(\frac{r_2}{r_1} \; \frac{1 + \cos\alpha_2}{1 + \cos\alpha_1} \right) = K \, \mathcal{L}og \left(\frac{tg \, \alpha_2/2}{tg \, \alpha_1/2} \right)$$

Car on a :

$$* \quad tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

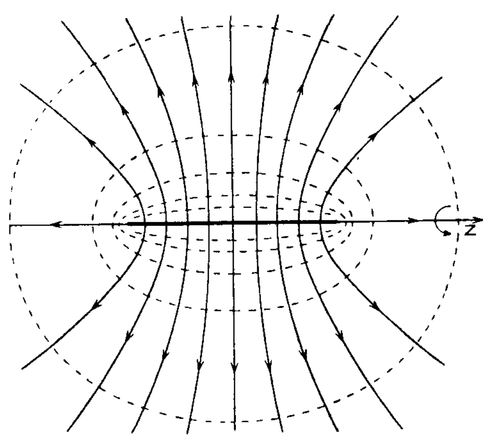
D'autre part, Les relations métriques dans Le triangle $P F_1 F_2$ donnent :

$$* \quad \frac{tg \, \alpha_2/2}{tg \, \alpha_1/2} = \frac{r_1 + r_2 + 2\ell}{r_1 + r_2 - 2\ell}$$

En posant : $r_1 + r_2 = 2a$. on obtient donc :

$$* \quad V_1(P) = K \, \mathcal{L}og \left(\frac{a + \ell}{a - \ell} \right)$$

Les équipotentielles sont donc des ellipsoïdes de révolution dans Le plan (r , θ) de, foyers F_1 et F_2 ; les lignes de forces étant des hyperboloïdes homofocales de mêmes foyers F_1 et F_2 que les ellipsoïdes.



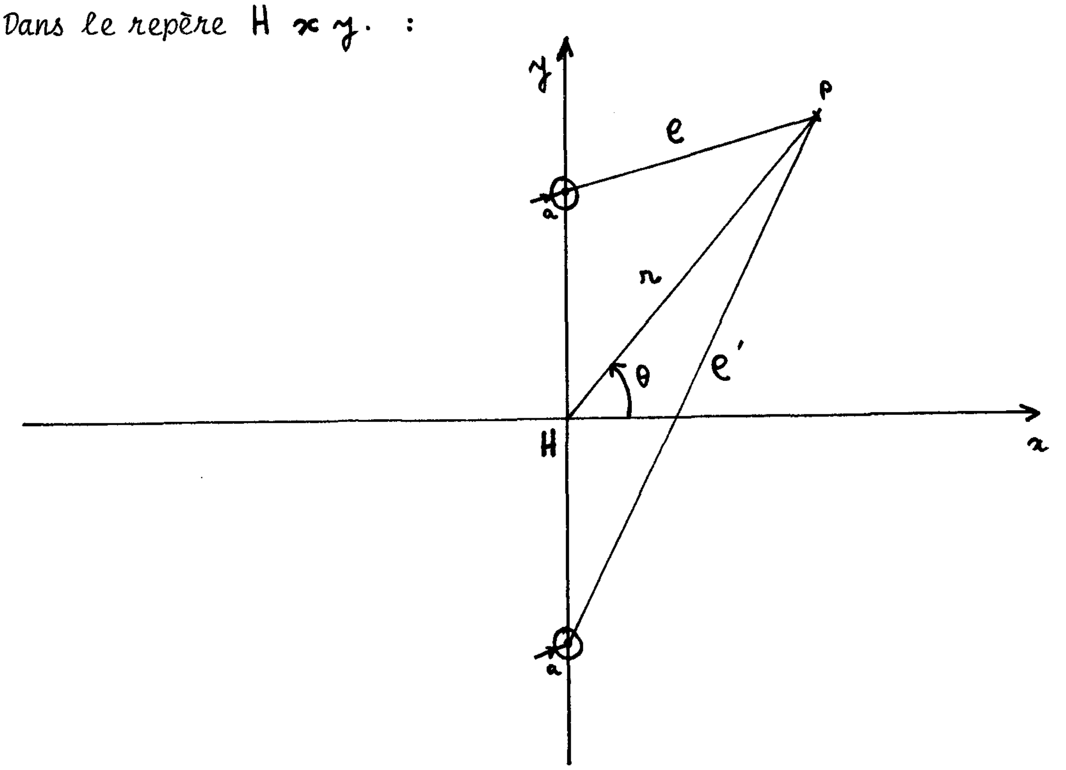
Pan la suite, nous prendrons l'expression :

$$* \ V_1(P) = -K \ \mathrm{Log}\left(\frac{r_2 + z - l}{r_1 + z + l}\right) \quad \text{avec } r_1 = \sqrt{e^2 + (l+z)^2} \quad \text{et } r_2 = \sqrt{e^2 + (l-z)^2}$$

De même que précédemment, on va appliquer le principe de superposition. Pour cela, on impose un potentiel nul sur l'ellipsoïde tangent à l'autre électrode (Ra longueur des électrodes étant supposée suffisemment grande devant Re rayon du cylindre pour pue l'électrode soit constemment ;tangente à l'ellipsoïde $(V=0)$. D'autre part, Re hayon de l'électrode a est toujours très inférieur à $2R$ ($a << 2R$) ; donc l'électrode peut être assimilée à un ellipsoïde de potentiel $-V_0$ d'où l'expression de V

$$* \ V_1(P) = \frac{V}{2 \ \mathrm{Log} \frac{2R}{a}} \ \mathrm{Log}\left[\left(\frac{r_2 + z - l}{r_1 + z + l}\right)\left(\frac{\sqrt{4R^2 + l^2} + l}{\sqrt{4R^2 + l^2} - l}\right)\right]$$

Dans le repère $H\,x\,y$:



.../...

L'expression du potentiel $V_1(P)$ *devient :*

$$* \; V_1(P) = \frac{V}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\,\mathrm{Log}\left[\left(\frac{\sqrt{4R^2+\ell^2}+\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}-\ell}\right)\times\left(\frac{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}+z-\ell}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}+z+\ell}\right)\right]$$

de façon analogue pour l'autre électrode, nous avons :

$$* \; V_2(P) = \frac{V}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\,\mathrm{Log}\left[\left(\frac{\sqrt{4R^2+\ell^2}-\ell}{\sqrt{4R^2+\ell^2}+\ell}\right)\times\left(\frac{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}+z+\ell}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}+z-\ell}\right)\right]$$

d'où l'expression générale du potentiel en $P(r,\theta,z)$ *:*

$$* \; \boxed{V(P) = \frac{V}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\left[\frac{\left(\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}+z-\ell\right)\times\left(\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}+z+\ell\right)}{\left(\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}+z+\ell\right)\times\left(\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}+z-\ell\right)}\right]}$$

d'où l'expression du champ électrique :

$$\bullet \; E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{V}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\left[\frac{-(r-R\sin\theta)}{(r^2-2rR\sin\theta+R^2)}\left(\frac{\ell+z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}}+\frac{\ell-z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{(r+R\sin\theta)}{(r^2+2rR\sin\theta+R^2)}\left(\frac{\ell+z}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}}+\frac{\ell-z}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}}\right)\right]$$

$$* \; E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{-V_0}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\left[\frac{R\cos\theta}{(r^2-2rR\sin\theta+R^2)}\left(\frac{\ell+z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}}+\frac{\ell-z}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{R\cos\theta}{(r^2+2rR\sin\theta+R^2)}\left(\frac{\ell+z}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}}+\frac{\ell-z}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}}\right)\right]$$

$$* \; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{V_0}{2\,\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell+z)^2}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+2rR\sin\theta+R^2+(\ell-z)^2}}\right.$$

.../...

• En particulier, pour $z = 0$, nous avons :

$$* \quad E_r = \frac{V_0}{2 \operatorname{Log} \frac{2R}{a}} \left[\frac{r - R\sin\theta}{(r^2 - 2rR\sin\theta + R^2)} \, \frac{2l}{\sqrt{r^2 - 2rR\sin\theta + R^2 + l^2}} - \frac{r + R\sin\theta}{(r^2 + 2rR\sin\theta + R^2)} \, \frac{2l}{\sqrt{r^2 + 2rR\sin\theta + R^2 + l^2}} \right]$$

$$* \quad E_\theta = - \frac{V_0}{2 \operatorname{Log} \frac{2R}{a}} \left[\frac{2R\cos\theta \; l}{(r^2 - 2rR\sin\theta + R^2)\sqrt{r^2 - 2rR\sin\theta + R^2 + l^2}} + \frac{2R\cos\theta \; l}{(r^2 + 2rR\sin\theta + R^2)\sqrt{r^2 + 2rR\sin\theta + R^2 + l^2}} \right]$$

$$* \quad E_z = 0$$

avec cette expression, on peu* vérifier que quand $l \to +\infty$ on retrouve bien les expressions pour le fil infini en $z = 0$; pour $l \to +\infty$:

$$* \quad \frac{l}{\sqrt{r^2 \pm 2rR\sin\theta + R^2 + l^2}} \xrightarrow[l \to +\infty]{} 1$$

Donc E_r Rend vers :

$$* \quad E_{r\infty} = \frac{V_0}{2 \operatorname{Log} \frac{2R}{a}} \left[\frac{(r - R\sin\theta)}{(r^2 - 2rR\sin\theta + R^2)} - \frac{r + R\sin\theta}{r^2 + 2rR\sin\theta + R^2} \right]$$

$$* \quad E_{r\infty} = \frac{V_0}{2 \operatorname{Log} \frac{2R}{a}} \; \frac{2R\sin\theta \; (R^2 - r^2)}{(r^2 + R^2)^2 - 4r^2R^2\sin^2\theta}$$

De même, E_θ tend vers :

$$* \quad E_{\theta\infty} = \frac{V_0}{2 \operatorname{Log} \frac{2R}{a}} \; \frac{2R\cos\theta \; (R^2 + r^2)}{(r^2 + R^2)^2 - 4r^2R^2\sin^2\theta}$$

On retrouve donc bien les expressions précédentes.

CALCUL DU CHAMP MAGNÉTIQUE INDUIT PAR LA DISTRIBUTION DE COURANT J AUTOUR DU CYLINDRE DE LONGUEUR FINIE 2L -

Nous devons donc rechercher $\vec{B}_1^{10}$ tel que :

* $\overrightarrow{rot}\, \vec{B}_1^{10} = \vec{E}_0$

Le système devient donc, en coordonnées cylindriques (e, θ, z) :

$$* \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_\theta = E_e$$

$$* \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial e} = E_\theta$$

$$* \quad \frac{1}{e} \left(\frac{\partial}{\partial e} (r B_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_r \right) = E_z$$

Compte tenu de la configuration, on ne peut plus supposer que $\vec{B}_1^{10} = B_z \vec{k}$. Cependant, pour simplifier la résolution, nous allons calculer le champ magnétique induit pour chacune des électrodes et faire ensuite la somme vectorielle.

Dans un repère lié à l'électrode, étant donné la symétrie cylindrique, nous n'avons plus de composantes E_θ . Sous cette forme, le système reste cependant délicat à résoudre.

Nous avons remarqué que pour chaque électrode, le réseau d'équipotentielles était un réseau d'ellipsoïdes. On peut introduire, pour résoudre ce système, les coordonnées elliptiques.

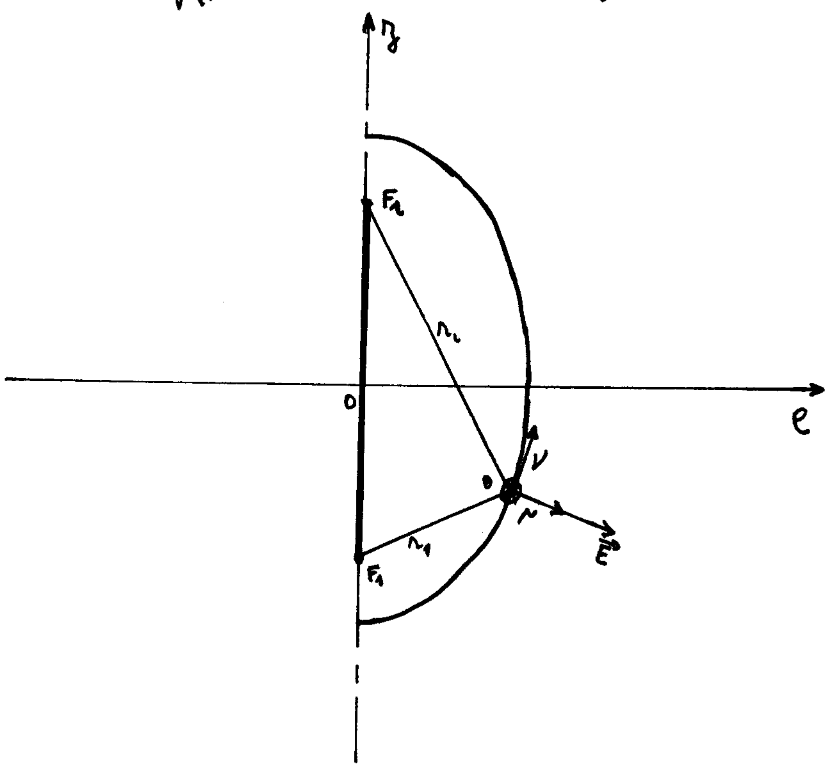
.../...

S i R'on paae :

$$* \qquad \mu = \frac{r_1 + r_2}{2l} \qquad\qquad \nu = \frac{r_1 - r_2}{2l}$$

Ou inversement :

$$* \qquad \rho = l\sqrt{(\mu^2-1)(1-\nu^2)} \qquad\qquad z = l\,\mu\,\nu$$



Le potentiel électrique s'écrit alors :

$$* \quad V(P) = \frac{-V}{\mathrm{Log}\,\frac{2l}{a}}\ \mathrm{Log}\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\right)$$

En *écrivant* que :

$$* \ dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2 = h_\mu^2 (d\mu)^2 + h_\theta^2 (d\theta)^2 + h_\nu^2 (d\nu)^2$$

$$= l^2 \frac{(\mu^2-\nu^2)}{\mu^2-1}\, d\mu^2 + l^2 (\mu^2-1)(1-\nu^2)\, d\theta^2 + l^2 \frac{(\mu^2-\nu^2)}{(1-\nu^2)} (d\nu)^2$$

.../...

Il vient donc d'après l'expression du gradient en coordonnées elliptiques :

$$* \quad E_\mu = -\frac{1}{h_\mu}\frac{\partial V}{\partial \mu} = -\frac{2V_0}{\mathrm{Log}\frac{2R}{a}}\frac{1}{\ell\sqrt{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-1)}}$$

$$* \quad E_\nu = -\frac{1}{h_\nu}\frac{\partial V}{\partial \nu} = 0$$

$$* \quad E_\theta = 0$$

et en appliquant au rotationnel les formules de changement de base, le système $\vec{rot}\,\vec{B}_1^{10} = \vec{E}_0^*$ devient :

$$* \quad \frac{1}{h_\theta h_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(h_\nu B_\nu) - \frac{\partial}{\partial\nu}(h_\theta B_\theta)\right) = E_\mu^*$$

$$* \quad \frac{1}{h_\mu h_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}(h_\mu B_\mu) - \frac{\partial}{\partial\mu}(h_\nu B_\nu)\right) = 0$$

$$* \quad \frac{1}{h_\mu h_\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}(h_\theta B_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(h_\mu B_\mu)\right) = 0$$

où encore :

$$* \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ell\sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)}{(1-\nu^2)}}\,B_\nu\right) - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\ell\sqrt{(\mu^2-1)(1-\nu^2)}\,B_\theta\right) = K.$$

$$* \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\ell\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2-1}}\,B_\mu\right) - \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\ell\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{1-\nu^2}}\,B_\nu\right) = 0.$$

$$* \quad \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\ell\sqrt{(\mu^2-1)(1-\nu^2)}\,B_\theta\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ell\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2-1}}\,B_\mu\right) = 0$$

Par analogie avec le cas du fil infini, on peut supposer que $B_\theta = B_\mu = 0$.
Il vient alors :

$$\left.\begin{aligned} * \quad & \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\ell\sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)}{(1-\nu^2)}}\,B_\nu\right) = K. \\ * \quad & \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\ell\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2-1}}\,B_\nu\right) = 0 \end{aligned}\right| \Longrightarrow B_\nu = K\sqrt{\frac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}}\,\theta.$$

Seulement, il faut vérifier que $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, dans notre système de coordonnées la divergence s'écrit :

$$* \ \mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{1}{h_\mu h_\theta h_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(h_\theta h_\nu B_\mu\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(h_\mu h_\nu B_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(h_\mu h_\theta B_\nu\right)\right)$$

d'où :

$$* \ \mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{1}{h_\mu h_\theta h_\nu}\ \frac{\partial}{\partial\nu}\left(h_\mu h_\theta B_\nu\right)$$

$$= \frac{1}{\ell^3(\mu^2-\nu^2)}\ \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\ell^2\sqrt{(\mu^2-\nu^2)(1-\nu^2)}\ K\sqrt{\frac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}}\,\theta\right)$$

$$= \frac{1}{\ell(\mu^2-\nu^2)}\ \frac{\partial}{\partial\nu}\left((1-\nu^2)\,K\,\theta\right) = -\frac{2\nu\theta}{\mu^2-\nu^2}\ \frac{K}{\ell}$$

$\mathrm{div}\,\vec{B}$ est différent de zéro, donc la solution estimée n'est pas la bonne ; il faut recommencer. Mais au lieu de repartir du système de départ qui est délicat à résoudre de façon globale, on peut à partir de la solution trouvée rechercher un vecteur $\vec{B}_0$, tel que :

$$* \ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}_0 = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{B}_0 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi$$

qui vérifie en outre :

$$* \ \mathrm{div}\,\vec{B}_0 = -\mathrm{div}\,\vec{B} = \frac{2\nu\theta}{\mu^2-\nu^2}\ \frac{K}{\ell}$$

alors le vecteur : $\vec{B}_1^{10} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ vérifiera : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B}_1^{10} = \vec{E}_0$

ainsi que : $\mathrm{div}\ \vec{B}_1^{10} = 0$ et sera alors solution du système.

On doit rechercher $\vec{B}_0$ tel pue :

$$* \ \mathrm{div}\,\vec{B}_0 = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi\right) = \Delta\Psi = \frac{2\nu\theta}{\mu^2-\nu^2}\ \frac{K}{\ell}.$$

Dans Re système de coordonnées elliptiques, R'expression générale du Laplacien est :

$$\ast \quad \Delta\Psi = \frac{1}{h_\mu h_\theta h_\nu}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_\theta h_\nu}{h_\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_\mu h_\nu}{h_\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{h_\mu h_\theta}{h_\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)\right) \quad (1)$$

Il vient donc :

$$\ast \quad \Delta\Psi = \frac{1}{\mu^2-\nu^2}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left((\mu^2-1)\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{(\mu^2-1)(1-\nu^2)}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left((1-\nu^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)\right] = \frac{2K\ell\nu\theta}{\mu^2-\nu^2}$$

On a une équation aux dérivées partielles (ici il s'agit d'une équation du type équation de POISSON] dont la résolution n'est pas immédiate. Aussi, pour simplifier et par analogie avec Re cas du cylindre infini, on peut chercher une sôlution de Ra forme :

$$\ast \quad \Psi = \theta\, f(\nu)$$

en reportant dans l'équation (1) il vient :

$$\ast \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\left((1-\nu^2)\,\theta\, f'(\nu)\right) = 2K\ell\nu\theta$$

d'où :

$$\ast \quad -2\nu f'(\nu) + (1-\nu^2) f''(\nu) = 2K\ell\nu = 2\lambda\nu \quad \text{avec} \quad \lambda = K\ell$$

On recherche d'abord Ra solution de l'équation sans necond membre :

$$\ast \quad -2\nu f_0'(\nu) + (1-\nu^2) f_0''(\nu) = 0 \Rightarrow \frac{f_0''(\nu)}{f_0'(\nu)} = \frac{2\nu}{1-\nu^2}$$

d'où :

$$\ast \quad \mathrm{Log}\,\frac{f_0'(\nu)}{\lambda} = -\mathrm{Log}\,(1-\nu^2) \Rightarrow f_0'(\nu) = \frac{\lambda}{1-\nu^2}.$$

Par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale :

$$\left.\begin{array}{l} * \; f' = \dfrac{\lambda}{1-\nu^2} \\ * \; f'' = \dfrac{\lambda'}{1-\nu^2} + \dfrac{2\nu\lambda}{(1-\nu^2)^2} \end{array}\right| \Longrightarrow \lambda' = 2\nu \quad \Rightarrow \lambda = \nu^2 + \beta$$

d'où :

$$* \quad f'(\nu) = \frac{\nu^2+\beta}{1-\nu^2} = -1 + \frac{\beta'}{1-\nu^2}$$

d'où :

$$* \quad f(\nu) = -\nu + \beta' \,\mathrm{Argth}\,\nu \qquad \text{d'où} \quad \Psi = K\ell\left(-\nu + \beta' \,\mathrm{Argth}\,\nu\right)\theta$$

En faisant maintenant $\vec{B}_o = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Psi$ il vient :

$$* \quad B_{o\mu} = \frac{1}{\ell_\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = 0$$

$$* \quad B_{o\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = K\frac{(\beta' \,\mathrm{Argth}\,\nu - \nu)}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-1)}}$$

$$* \quad B_{o\nu} = \frac{1}{\ell_\nu}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = \theta K\left[\frac{\beta'}{1-\nu^2} - 1\right] \times \sqrt{\frac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}} = \theta K\left[\frac{\nu^2 - 1 + \beta'}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}}\right]$$

D'autre part, pour que les conditions aux limites soient vérifiées, il faut prendre :

$$* \quad \beta' = 1$$

Il vient donc :

$$* \quad B_{o\mu} = 0$$

$$* \quad B_{o\theta} = K\frac{(\mathrm{Argth}\,\nu - \nu)}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-1)}}$$

$$* \quad B_{o\nu} = \theta K\left[\frac{\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}}\right]$$

D'où la solution du système :

* $\vec{B}_1^{10} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$

* $B^{10}_{1\mu} = 0$

* $B^{10}_{1\theta} = \dfrac{A\,\mathrm{argth}\,\nu - \nu}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-1)}}$

* $B^{10}_{1\nu} = \theta K \left[\dfrac{\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}} + \dfrac{1-\nu^2}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}}\right] = \dfrac{\theta K}{\sqrt{(1-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}}$

On vérifie bien que :

* $\mathrm{div}\, \vec{B}_1^{10} = 0$

Il faut maintenant exprimer le vecteur $\vec{B}_1^{10}$ dans la base (e, θ, z) dans cette base, nous avons :

* $\vec{e}_e = \mu \sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}}\, \vec{e}_\mu + \nu \sqrt{\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2-\nu^2}}\, \vec{e}_\nu$

* $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta$

* $\vec{e}_z = -\nu \sqrt{\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2-\nu^2}}\, \vec{e}_\mu + \mu \sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}}\, \vec{e}_\nu$

$\vec{e}_e, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z, \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu$ étant des vecteurs unitaires.

Il vient donc :

$$\begin{pmatrix} B^{10}_{1e} \\ B^{10}_{1z} \\ B^{10}_{1\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}} & -\nu \sqrt{\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2-\nu^2}} & 0 \\ \nu \sqrt{\dfrac{\mu^2-1}{\mu^2-\nu^2}} & \mu \sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{\mu^2-\nu^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B^{10}_{1\nu} \\ B^{10}_{1\theta} \end{pmatrix}$$

.../...

d'où en coordonnées cylindriques :

$$* \; B^{10}_{1e} = -K\,\nu\sqrt{\frac{\mu^2-1}{1-\nu^2}} \times \frac{\theta}{(\mu^2-\nu^2)} = K\theta\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{(r_1+r_2)^2-4l^2}{4e}\right)$$

$$* \; B^{10}_{1\theta} = K\,\frac{l}{r}\left(\mathrm{Argth}\left(\frac{r_1-r_2}{2l}\right)-\left(\frac{r_1-r_2}{2l}\right)\right)$$

$$* \; B^{10}_{1z} = K\,\frac{\mu\theta}{\mu^2-\nu^2} = \frac{K}{2}\,l\theta\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

avec $r_1 = \sqrt{e^2+(l+z)^2}$ et $K = \dfrac{1}{\mathrm{Log}\frac{2R}{a}}$

et $r_2 = \sqrt{e^2+(l-z)^2}$

en particulier , pour $z = 0$ *, puisque c'est le cas qui nous intéresse,*
on vérifie que : $B^{10}_{1e} = B^{10}_{1\theta} = 0$

et :

$$* \; B^{10}_{1z} = K\theta\left(\frac{l}{\sqrt{e^2+l^2}}\right)$$

Dans le système de coordonnées (r,θ,z)*, nous avons :*

$$* \; B^{10}_{1z} = -K\,\frac{l^*}{\sqrt{r^2-2r\sin\theta+1+l^{*2}}}\;\mathrm{Arctg}\,\frac{\cos\theta}{r-\sin\theta} \qquad \text{avec } l^* = \frac{l}{R}$$

pour l'autre électrode, Le même type de calcul donne pour $z = 0$ *:*

$$* \; B^{10}_{1r} = B^{10}_{1\theta} = 0 \quad \text{et} \quad B^{10}_{1z} = -K\,\frac{l^*}{\sqrt{r^2+2r\sin\theta+1+l^{*2}}}\;\mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r+\sin\theta}\right)$$

.../...

d'où :

$$\boxed{B_{12}^{10} = -K\left[\frac{l^*}{\sqrt{r^2-2r\sin\theta+1+l^{*2}}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r-\sin\theta}\right)+\frac{l^*}{\sqrt{r^2+2r\sin\theta+1+l^{*2}}}\times \mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r+\sin\theta}\right)\right] \quad \text{avec} \quad K=-\frac{1}{\mathrm{Log}\,\frac{2R}{a}}}$$

Avec cette expression, on vérifie bien que quand $l^* \to \infty$ B_{12}^{10} tend vers :

$$\ast\; B_i = -K\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r-\sin\theta}\right)+\mathrm{Arctg}\left(\frac{\cos\theta}{r+\sin\theta}\right)\right)$$

qui est l'expression du champ magnétique induit dans le cadre du cylindre infiniment long.

Le champ de forces $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_i^{10}$ sera calculé directement dans le programme car l'expression serait trop longue.

- ANNEXE 4 -

-=-=-=-=-

NON IRROTATIONNALITÉ DE $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$ ET DE $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1$ EN $z = 0$

-=-=-=-=-

ANNEXE 4 -

NON IRROTATIONNALITÉ DE $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$ ET DE $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}$ EN $z = 0$ -

Ecrivons l'expression de $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$ *, nous avons :*

$$= \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\theta B_0 \\ -E_r B_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, on écrit $\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0)$ *en coordonnées cylindriques :*

$$= \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0) \begin{pmatrix} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(0) - \dfrac{\partial}{\partial z}(-E_r B_0) \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial z}(E_\theta B_0) - \dfrac{\partial}{\partial s}(0) \\[2ex] \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(-r E_r B_0) - \dfrac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta B_0)\right] \end{pmatrix}$$

d'où :

$$= \vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0) \begin{pmatrix} B_0 \dfrac{\partial}{\partial z}(E_r) \\[2ex] B_0 \dfrac{\partial}{\partial z}(E_\theta) \\[2ex] -B_0 \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta)\right] \end{pmatrix}$$

.../...

Or en $z = 0$:

$$* \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} E_r\right)_{z=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} E_\theta\right)_{z=0} = 0$$

et :

$$* \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta = \operatorname{div}\vec{E} - \frac{\partial}{\partial z} E_z$$

$$* \quad \operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad \text{mais en } z = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} E_z\right)_{z=0} \neq 0 \quad \text{donc}$$

$$* \quad - B_0 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta)\right] = B_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} \neq 0 \ (\text{pour } z = 0)$$

<u>DONC LA FORCE $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$ N'EST PAS IRROTATIONNELLE.</u>

Ecrivons maintenant l'expression de $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}$:

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\theta B_z - E_z B_\theta \\ E_z B_r - E_r B_z \\ E_r B_\theta - E_\theta B_r \end{pmatrix}$$

On exprime le rotationnel de cette expression :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}\right) \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(E_r B_\theta - E_\theta B_r\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(E_z B_r - E_r B_z\right) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}\left(E_\theta B_z - E_z B_\theta\right) - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(E_r B_\theta - E_\theta B_r\right) \\[2ex] \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r E_z B_r - r E_r B_z\right) - \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(E_\theta B_z - E_z B_\theta\right)\right] \end{cases}$$

.../...

Now now plaçons ensuite dans une configuration hydrodynamique bidimensionnelle ($z = 0$), on s'intéressera donc à la composante en z de $\vec{rot}((\vec{u}.\vec{\nabla}).\vec{u})$ (qui correspond à la dérivation en r et θ). Il faut donc étudier la composante en z de $\vec{rot}$ $(\vec{E}_o \wedge \vec{B}_1^{10})$, il vient :

$$\bullet \quad \vec{rot}\,(\vec{E}_o \wedge \vec{B}_1^{10})_z = \frac{1}{r}\Big(B_r \frac{\partial}{\partial r} r E_z + E_z \frac{\partial}{\partial r} r B_r - B_z \frac{\partial}{\partial r}(r E_r)$$

$$- E_r \frac{\partial}{\partial r}(r B_z) - B_z \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta - E_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} B_z + B_\theta \frac{\partial E_z}{\partial \theta} + E_z \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}\Big)$$

$$= E_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(B_\theta)\right) - B_z\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_r)$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta\Big) - \frac{E_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_z) - \frac{E_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} B_z + \frac{B_r}{r}\frac{\partial}{\partial r} r E_z + \frac{B_\theta}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta}$$

comme : $\quad \mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

$$\bullet \quad \vec{rot}\,(\vec{E}_o \wedge \vec{B}_1^{10})_z = - E_z \frac{\partial B_z}{\partial z} + B_z \frac{\partial}{\partial z} E_z - \frac{E_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_z)$$

$$- \frac{E_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} B_z + \frac{B_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_z) + \frac{B_\theta}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta}$$

On se place en $z = 0$. Alors : $E_z = 0$ et $B_r = B_\theta = 0$. Il reste donc :

$$* \quad \left(\vec{rot}\,(\vec{E}_o \wedge \vec{B}_1^{10}).\vec{k}\right)_{z=0} = B_z\left(\frac{\partial}{\partial z} E_z\right)_{z=0} - \frac{E_r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r B_z)\right)_{z=0}$$

$$- \left(\frac{E_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} B_z\right)_{z=0}$$

On vérifie par un développement que de cette expression que $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}} \left(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10} \right) \cdot \vec{\ell} \right)_{z=0} \neq 0$

donc :

<u>LA FORCE $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{10}$ N'EST PAS *IRROTATIONNELLE*</u>

- ANNEXE 5 -

-=-=-=-

RÉSOLUTION PAR ÉLÉMENTS FINIS
REMPLISSAGE DES DIFFÉRENTES MATRICES

-=-=-=-=-=-

ANNEXE 5 -

RÉSOLUTION PAR ÉLÉMENTS FINIS
REMPLISSAGE DES DIFFÉRENTES MATRICES -

On utilise la démarche classique en éléments finis : au lieu de chercher u et p dans $V^2 = (H^1(\Omega))^2$ et $V = H^1(\Omega)$, on va les chercher dans un espace fonctionnel de dimension finie V_N^2 et V_N pue l'on construit à partir d'un nombre fini d'éléments d'une "base" de V^2 (ou V).

On introduit une famille de triangles $\mathcal{T}_K$ telle que :

* famille finie

* $\forall T \in \mathcal{T}_K \qquad mes(T) < \varphi(\varepsilon) \qquad$ avec $\varphi(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

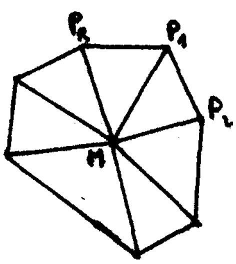
On aura, si $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_\varepsilon} T$:

* $\Omega_\varepsilon \longrightarrow \Omega$

au sens où $\forall K$ compact de Ω :

* $\exists\, \varepsilon_K \;/\; \forall \varepsilon < \varepsilon_K \qquad K \subset \Omega_\varepsilon$

On construit alors une famille d'éléments $(w_m)_m$ de V telle que : étant donné un point M sommet d'un triangle :



* $w_M(M) = 1$
* $w_M(P_i) = 0$ points différents de M
* w_M linéaire sur les triangles de sommet M

On pose K le nombre total de triangles et N le nombre total de sommets.
Soit V_N engendrée par les $(w_m)_1^N$
on se ramène au problème approché :

<u>TROUVER $u_N \in (V_N)^2$ ET $p_N \in V_N$ TELS QUE :</u> $\forall v \in (V_N)^2$

$$(I) \quad * \int_\Omega (a_j\, u_{N_j} + a_j\, u_{N_i})\, v_{j,i}\, dx + \int_\Omega p_N\, v_{j,j}\, dx = -\int_\Omega f_j v_j\, dx + \int_{\delta\Omega} p_N v_j n_j\, d\sigma$$

avec :

$$* \quad u_{N_{i,i}} = 0$$

• <u>Mise sous forme matricielle du problème</u> :

Comme $(w_m)_{m=1}^N$ est une base de V_N , on pose :

$$* \quad u_N = \sum_m u_m \begin{pmatrix} w_m \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_m v_m \begin{pmatrix} 0 \\ w_m \end{pmatrix}$$

et p sera pris constant sur chaque triangle T_k

$$* \quad p = \sum_k p_K\, 1\!\!1_k$$ $1\!\!1_k$: fonction caractéristique de

La relation $u_{i,i} = 0$ sera traitée sous la forme :

$$* \int_{T_k} u_{i,i}\, dx = 0 \qquad \forall k \in N_K$$

Soit w_p une fonction de base, écrivons ce que deviennent les équations (I) avec les deux fonctions test $\begin{pmatrix} 0 \\ w_m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} w_m \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$* \int_\Omega \left(a_1 \sum u_m w_m + a_1 \left(\sum u_m w_m\right)\right) w_{p,1} + \left(a_2 \sum u_m w_m + a_2 \sum v_m w_m\right) w_{p,2}\, dx$$

$$+ \int_\Omega p\, w_{p,1}\, dx = -\int_\Omega f_1\, w_p\, dx + \int_{\delta\Omega} p\, w_p\, n_1\, d\sigma$$

$$* \int_{\Omega} \left(a_2 \sum v_m w_m + a_2 \sum v_m w_m\right) w_{p,2} + \left(a_1 \sum v_m w_m + a_2 \sum u_m w_m\right) w_{p,1}\, dx$$

$$+ \int_{\Omega} p\, w_{p,2}\, dx = - \int_{\Omega} f_2\, w_p\, dx + \int_{\delta\Omega} p\, w_p\, n_2\, d\sigma$$

En travaillant sur $\Omega_K = \bigcup_K T_K$ *, on obtient :*

$$* \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} 2a_1\, w_m\, w_{p,1} + a_2\, w_m\, w_{p,2}\, dx \right) u_m + \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} a_1\, w_m\, w_{p,2}\, dx \right) v_m + \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{T(k)} w_{p,1}\, dx \right) p_K = - \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} f_1\, w_p\, dx + \int_{\Gamma} p\, w_p\, n_1\, d\sigma$$

$$* \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} a_2\, w_m\, w_{p,1}\, dx \right) u_m + \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} 2a_2\, w_m\, w_{p,2} + a_1\, w_m\, w_{p,1}\, dx \right) v_m$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \left(\int_{T(k)} w_{p,2}\, dx \right) p_k = - \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} f_2\, w_p\, dx + \int_{\Gamma_p \cup \Gamma_w} p\, w_p\, n_2\, d\sigma$$

On pose : $V = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_K \end{pmatrix}$

.../...

Soit A *matrice* 2N , 2N *définie* pair :

$$* \; a_{2q-1,2p-1} = \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} \left(2a_1 w_p w_{q,1} + a_2 w_p w_{q,2} \right) dx.$$

$$* \; a_{2q-1,2p} = \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} a_1 w_p w_{q,2} \, dx.$$

$$* \; a_{2q,2p-1} = \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} a_2 w_p w_{q,1} \, dx.$$

$$* \; a_{2q,2p} = \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} \left(2a_2 w_p w_{q,2} + a_1 w_p w_{q,1} \right) dx.$$

$$* \quad q \in \mathbb{N}_N^* \quad \text{et} \quad p \in \mathbb{N}_N^*$$

Soit B *matrice* 2N , K *définie* pair :

$$* \; b_{2q-1,k} = \int_{T(k)} w_{q,1} \, dx - \mathbb{1}_{F_p}(k) \int_{S_k^p} w_q n_1 \, d\sigma - \mathbb{1}_{F_\infty}(k) \int_{S_k^\infty} w_q n_1 \, d\sigma$$

$$* \; b_{2q,k} = \int_{T(k)} w_{q,2} \, dx - \mathbb{1}_{F_p}(k) \int_{S_k^p} w_q n_2 \, d\sigma - \mathbb{1}_{F_\infty}(k) \int_{S_k^\infty} w_q n_2 \, d\sigma$$

avec :

- $\mathbb{1}_{F_p}$ *est la fonction caractéristique de* :

$$* \quad F_p = \left\{ k \in \mathbb{N}_K^* \, / \, mes \left(T(k) \cap \Gamma_p \right) \neq 0 \right\}$$

- $\mathbb{1}_{F_\infty}$ *est la fonction caractéristique de* :

$$* \quad F_\infty = \left\{ k \in \mathbb{N}_K^* \, / \, mes \left(T(k) \cap \Gamma_\infty \right) \neq 0 \right\}$$

avec $k \in \mathbb{N}_K^*$ *et* $q \in \mathbb{N}_N^*$

.../...

Soit F vecteur 2N défini par :

$$* \quad f_{2q-1} = - \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} f_1 \, w_q \, dx.$$

$$* \quad f_{2q} = - \sum_{k=1}^{K} \int_{T(k)} f_2 \, w_q \, dx.$$

Le système général se met domc sous Ra forme matricielle suivante :

$$* \quad A\,U + B\,P = F$$

et il faut ajouter les K équations qui traduisent la condition :

$$* \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Soit C la matrice K , 2N définie par :

$$* \quad c_{k,2q-1} = \int_{T(k)} w_{q,1} \, dx.$$

$$* \quad c_{k,2q} = \int_{T(k)} w_{q,2} \, dx$$

Cette condition peut donc se mettre sous la forme :

$$* \quad C\,U = 0$$

Le problème revient alors à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{c} \\ 2N \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2N & K \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \left[\begin{array}{c} U \\ \hline P \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c} F \\ \hline 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2N \\ K \end{array}$$

• <u>Calcul des matrices A, B et C</u>

La forme des coefficients $a_{q,p}$, $b_{q,k}$, $c_{k,p}$, nous indique qu'ils sont la somme de la contribution de chacun des triangles. On va donc se placer sur un triangle $T(k)$ donné, calculer toutes les petites integrales non nulles et les sommer dans les matrices A, B et C qui seront construites quand k aura parcouru $\mathbb{N}_K^*$.

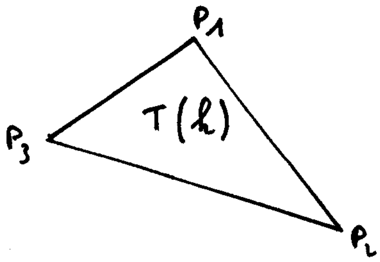
Soit $k \in \mathbb{N}_K^*$ fixé, faisons l'inventaire des quantités à calculer en supposant a_1 et a_2 constants sur les triangles :

* I1 . $\int_{T(k)} w_p \; w_{q,1} \, dx$
* I2 . $\int_{T(k)} w_p \; w_{q,2} \, dx.$
* J1. $\int_{T(k)} w_{p,1} \, dx.$

J2 . $\int_{T(k)} w_{p,2} \, dx.$

L1 . $\int_{T(k)} w_p \, n_1 \, d\sigma$

L2 . $\int_{T(k)} w_p \, n_2 \, d\sigma$



Les seules fonctions de base non nulles dans le triangle $T(k)$ sont w_{P_1} , w_{P_2} , w_{P_3} correspondant aux sommets.

Pour $I1^k$ et $I2^k$ seules neuf valeurs correspondant aux neuf couples $(w_{P_i}, w_{P_j})_{i,j=1,3}$ sont non nulles.
Soient I_1^k et I_2^k deux matrices 3,3 définies par :

$$* \; I1^k_{i,j} = \int_{T(k)} w_{P_i} \; w_{P_j,1} \, dx.$$

$$* \; I2^k_{i,j} = \int_{T(k)} w_{P_i} \; w_{P_j,2} \, dx.$$

.../...

- Pour $J1$ et $J2$ seules trois valeurs non nulles :
  on définit $J1$ et $J2$ vecteurs à trois dimensions :

$$* \quad J1_i^k = \int_{T(k)} w_{p_i,1} \; An.$$

$$* \quad J2_i^k = \int_{T(k)} w_{p_i,2} \; dx.$$

- Pour $L1$ et $L2$:
  Si $T(k)$ n'est pas un triangle frontière :

$$* \quad L1_i^k = 0 \qquad\qquad L2_i^k = 0$$

  Si $T(k)$ est triangle frontière :

$$* \quad L1_i^k = \int_{T(k) \cap (\Gamma_\infty \cap \Gamma_p)} w_{p_i} \, n_1 \, d\sigma \qquad i = 1,2$$

$$* \quad L2_i^k = \int_{T(k) \cap (\Gamma_\infty \cap \Gamma_p)} w_{p_i} \, n_2 \, d\sigma \qquad i = 1,2$$

On doit maintenant revenir aux coefficients $a_{q,p}$ $b_{q,k}$ et $c_{k,p}$ en sommant les contributions : I_1^k, I_2^k, $J1^k$, $J2^k$, $L1^k$, $L2^k$
Soit :

$$* \quad \varphi(k,i) \qquad k \in \mathbb{N}_K^* \qquad i \in \mathbb{N}_3^*$$

telle que :

$* \quad \varphi(k,i)$ = numéro du sommet i du triangle $T(k)$. On aura à effectuer les opérations suivantes :

$$* \quad \forall \, (i,j) \in (\mathbb{N}_3^*)^2$$

On pose :

$$* \quad p = \varphi(k,i) \qquad\qquad q = \varphi(k,j)$$

$$\left|\begin{array}{l} * \ I1^k_{i,j} \times 2a^k_1 \longrightarrow a_{2q-1,2p-1} \\ * \ I1^k_{i,j} \times a^k_1 \longrightarrow a_{2q,2p} \\ * \ I1^k_{i,j} \times a^k_2 \longrightarrow a_{2q,2p-1} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} * \ I2^k_{i,j} \times a^k_2 \longrightarrow a_{2q-1,2p-1} \\ * \ I2^k_{i,j} \times a^k_1 \longrightarrow a_{2q-1,2p} \\ * \ I2^k_{i,j} \times 2a^k_2 \longrightarrow a_{2q,2p} \end{array}\right.$$

* $\forall i \in (\mathbb{N}^*_3)$
* $q = \varphi(k,i)$

$$\left|\begin{array}{l} * \ J1^k_i \longrightarrow b_{2q-1,k} \longrightarrow c_{k,2q-1} \\ * \ J2^k_i \longrightarrow b_{2q,k} \longrightarrow c_{k,2q} \end{array}\right.$$

* $\forall i \in \mathbb{N}^*_3 \qquad q = \varphi(k,i)$

$$\left|\begin{array}{l} * \ -L1^k_i \longrightarrow b_{2q-1,k} \\ * \ -L2^k_i \longrightarrow b_{2q,k} \end{array}\right.$$

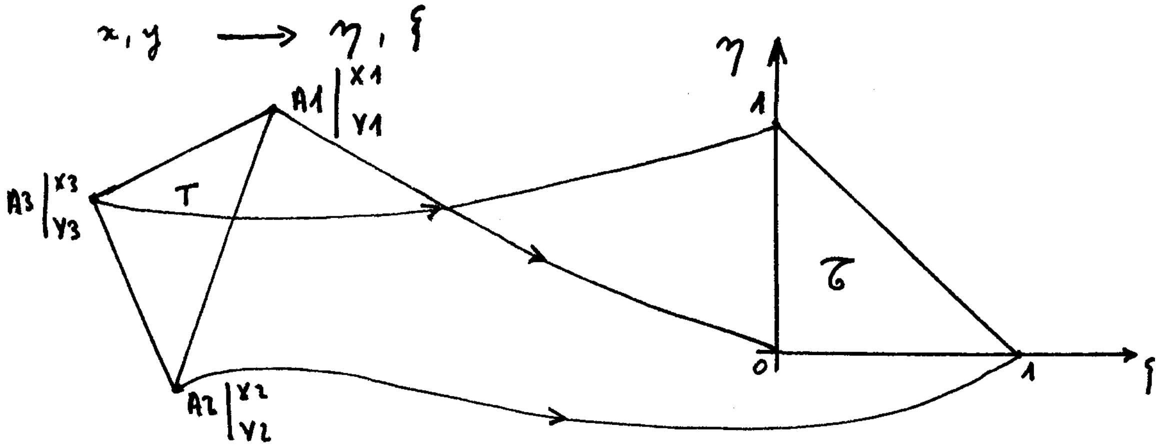
En faisant ces opérations pour chaque triangle k on obtient A, B et C. Reste à calculer de façon effective :

$$I1 ,\ I2 ,\ J1 ,\ J2 ,\ L1 ,\ L2.$$

• Calcul des matrices élémentaires : I1, I2, J1, J2, L1, L2

Pour effectuer les intégrations on va tout ramener à un triangle de base par un changement de variable:

$$x, y \longrightarrow \eta, \xi$$



on a :

$$x = X_1 (1 - \xi - \eta) + X_2 \xi + X_3 \eta$$

$$y = Y_1 (1 - \xi - \eta) + Y_2 \xi + Y_3 \eta$$

et :

$$w_{p_i}^{k} (x, y) = F_i (\xi, \eta) \qquad F_1 (\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$F_2 (\xi, \eta) = \xi$$

$$F_3 (\xi, \eta) = \eta$$

.../...

- Caractéristiques du changement de variable

On pose : $X_{ij} = X_i - X_j \qquad Y_{ij} = Y_i - Y_j$

Il vient facilement que :

$*$ J jacobien $\qquad J = X_{21} Y_{31} - X_{31} Y_{21}$

$$* \ \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{Y_{23}}{J} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{X_{32}}{J}$$

$$* \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{Y_{31}}{J} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{X_{13}}{J}$$

$$* \ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{Y_{12}}{J} \qquad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{X_{21}}{J}$$

- Calcul de I1 et I2

On a pour I1 (respectivement pour T1) :

$$* \ I1_{i,j} = \int_T w_{p_i} \, w_{p_{j,1}} \, dx \, dy = \int_\tau F_i(\xi,\eta) \left(F_j(\xi,\eta)\right)_{,x} |J| \, d\eta \, d\xi$$

Comme F_j est linéaire et $|J|$ constant :

$$* \ I1_{i,j} = \left(F_j(\xi,\eta)\right)_{,x} |J| \int_\tau F_i(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta.$$

$$* \text{ or } \ \forall i \int_\tau F_i(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta = \frac{1}{6}$$

soit $\varepsilon = \frac{J}{|J|}$ les matrices I1 et I2 sont les suivantes :

$$I1 = \frac{\varepsilon}{6}\begin{bmatrix} +Y_{23} & Y_{31} & Y_{12} \\ +Y_{23} & Y_{31} & Y_{12} \\ +Y_{23} & Y_{31} & Y_{12} \end{bmatrix} \qquad I2 = \frac{\varepsilon}{6}\begin{bmatrix} X_{32} & X_{13} & X_{21} \\ X_{32} & X_{13} & X_{21} \\ X_{32} & X_{13} & X_{21} \end{bmatrix}$$

.../...

- Calcul de J1 et J2

Rappelons que :

$$* \quad J1_i = \int_T w_{p_i,1} \, dx \quad \text{et} \quad J2 = \int_T w_{p_i,2} \, dx.$$

Par changement de variable et intégration, on obtient :

$$J1 = \frac{\varepsilon}{2} \begin{bmatrix} Y_{23} \\ Y_{31} \\ Y_{12} \end{bmatrix} \qquad J2 = \frac{\varepsilon}{2} \begin{bmatrix} X_{32} \\ X_{31} \\ X_{21} \end{bmatrix}$$

- Calcul de L1 et L2

On se donne les points sur la frontière et on calcule la contribution de chaque segment.

Soit : $\Psi_p(i)$ telle que :

$*$ $\Psi_p(i)$ = numéro du Ième point sur la frontière μ_p

Soit : $\phi(i)$ telle que :

$*$ $\phi(i)$ = numéro du triangle contenant Le ième et Le ième + 1 point sur La frontière μ_p

Soit : NLP Le nombre de points sur μ_p

Pour $i \neq NLP$ $\quad (\Psi(NLP) = \Psi(1))$

On considère le segment :

$$* \quad [A_i , A_{i+1}]$$

La normale est définie par :

$$* \quad \vec{n} \begin{pmatrix} (Y_i - Y_{i+1})/D \\ \\ (X_{i+1} - X_i)/D \end{pmatrix} \qquad \text{avec } D = \left((X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2 \right)^{1/2}$$

On a à calculer :

$$* \int_{A_i}^{A_{i+1}} w_p \, n_1 \, d\sigma \quad \text{et} \quad \int_{A_i}^{A_{i+1}} w_p \, n_2 \, d\sigma$$

Ces deux intégrales seront non nulles uniquement pour : $p = \Psi(i)$ *et* $p = \Psi(i+1)$
Comme n_1 *et* n_2 *sont constants sur le segment :*

$$* \int_{A_i}^{A_{i+1}} w_{\Psi(i)} \, n_1 \, d\sigma = \frac{1}{2} (Y_i - Y_{i+1})$$

$$* \int_{A_i}^{A_{i+1}} w_{\Psi(i)} \, n_2 \, d\sigma = \frac{1}{2} (X_{i+1} - X_i)$$

d'où pour $l = \phi(i)$ *il suffira de faire :*

$$* - \frac{1}{2} (Y_i - Y_{i+1}) \longrightarrow b_{2\Psi_p(i)-1,\ \phi_p(l)} \longrightarrow b_{2\Psi_p(i+1)-1,\ \phi_p(l)}$$

$$* - \frac{1}{2} (X_{i+1} - X_i) \longrightarrow b_{2\Psi(i),\ \phi_p(l)} \longrightarrow b_{2\Psi(i+1),\ \phi_p(l)}$$

Le raisonnement est identique pour μ_∞ *, il suffit de changer tous les indices* p *en* ∞ *et de prendre :*

$$* \quad \vec{n} \begin{pmatrix} Y_{i+1} - Y_i \\ \\ X_i - X_{i+1} \end{pmatrix}$$

- Calcul du second membre

De même pue l'on a calculé $J1$ et $J2$ pou chaque .&Lang& $T(\ell)$, on définit :

$$* \; F1_i^{\ell} = \int_{T(\ell)} f_1 \, w_{\varphi(\ell,i)} \, dx \qquad * \; F2_i^{\ell} = \int_{T(\ell)} f_2 \, w_{\varphi(\ell,i)} \, dx.$$

En supposant f_1 et f_2 constants sur chaque triangle, on obtient en revenant au triangle de base:

$$* \; F1_i^{\ell} = \frac{|J|}{6} f_1^{\ell} \qquad F2_i^{\ell} = \frac{|J|}{6} f_2^{\ell} \qquad \forall i = 1,3$$

Il suffit ensuite d'assembler F :

$$* \; - F1_i^{\ell} \longrightarrow F_{2\varphi(\ell,i)-1}$$

$$- F2_i^{\ell} \longrightarrow F_{2\varphi(\ell,i)}$$

- ANNEXE 6 -

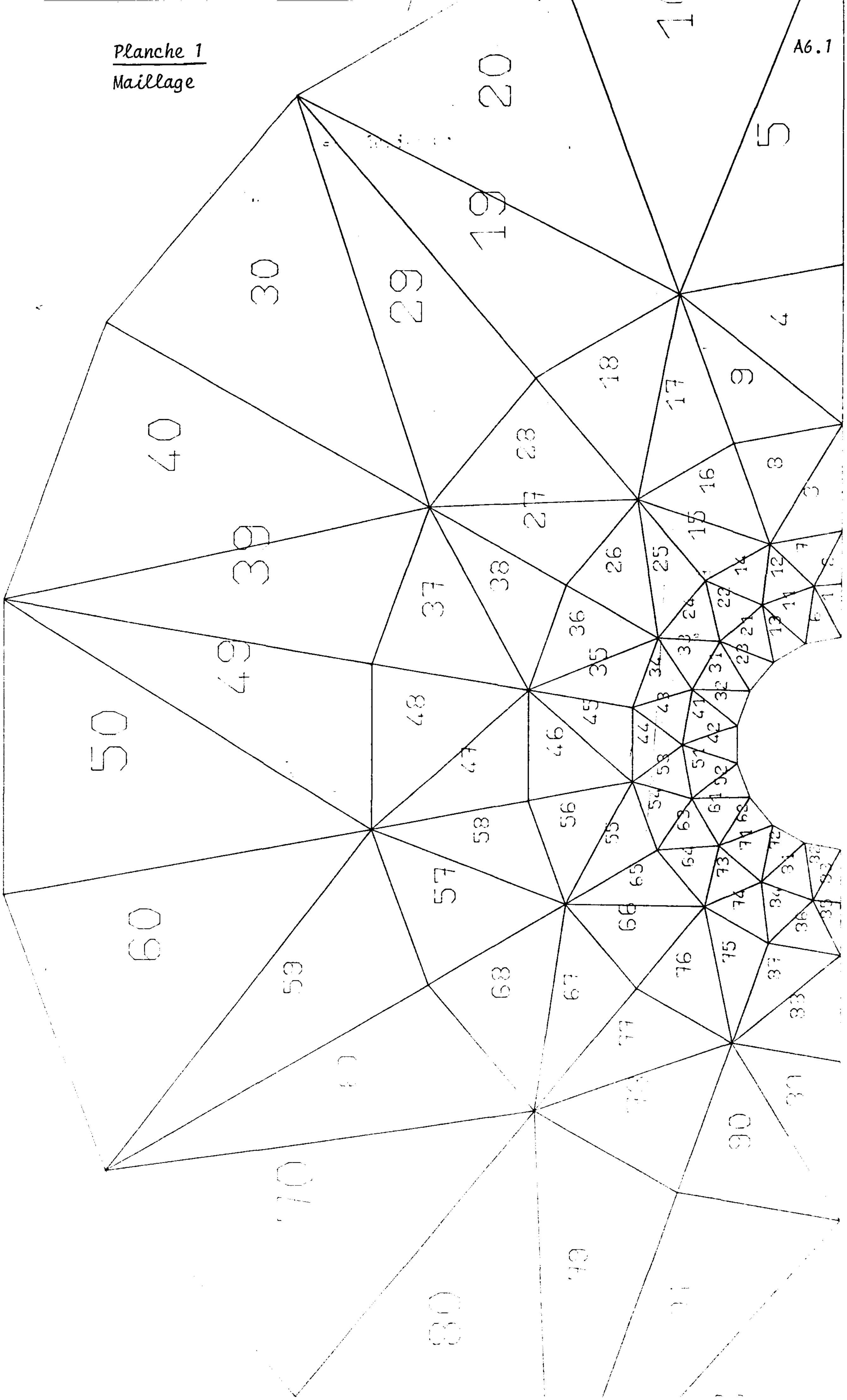
-=-=-=-

LISTINGS ET TRACÉS

-=-=-=-

Planche 1

Maillage



```
MHD,T100,CM100000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,CNESLIB,ID=BIBLI.
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
LIBRARY(LIB).
PURGE,BVITN,ID=GEPAN.
RETURN,BVITN.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE13,PF.
PURGE,BFORC,ID=GEPAN.
RETURN,BFORC.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE14,PF.
FTN.
LGO.
CATALOG,TAPE13,BVITN,ID=GEPAN,RP=999.
CATALOG,TAPE14,BFORC,ID=GEPAN,RP=999.
*EOR
      PROGRAM MHD(OUTPUT,TAPE10,TAPE11=OUTPUT,TAPE13
     1,TAPE14)
C***********************************************************************
C****   FORCE DE VOLUME CREEE PAR 2 ELECTRODES +V,-V              ****
C****                DE LONGUEUR FINIE LG                           ****
C****              DIAMETRALEMENT  OPPOSEES                         ****
C****                A L ORDRE  "I"  SOIT  :                        ****
C****              E REEL  X  B APPLIQUE                            ****
C***********************************************************************
C
C
C
C-----DECLARATIONS-------------------------------------------------
C
      REAL X(2,61)
      REAL VN(214),VT(214)
      REAL X21,X13,X32,Y12,Y23,X12,Y12
      REAL IL(214),IC(214),I1(3,3),I2(3,3),J1(3)
      REAL J2(3),DJ,EPS,A1K,A2K,F(214),F1,F2
      REAL SIG,R,F11,F21
      INTEGER IE(3,92),LI(10),LP(20),NE,NP,NLI,NLP,TE(122)
      INTEGER M(3),CPT,P,Q1,Q2,Q3,Q4,DT,PI,Q
C
C-----INITIALISATIONS----------------------------------------------
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE------------------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
      READ (10,9) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    3 FORMAT (3I5)
    9 FORMAT (5I5)
      Q=2*NP+NE
      WRITE (11,1) NP,NE,NLP,NLI
C
C-----CALCUL DES MATRICES A,B,C------------------------------------
C
      DO 200 K=1,NE
C
C         INTERMEDIAIRES DE CALCUL
C
      M(1)=IE(1,K)
      M(2)=IE(2,K)
      M(3)=IE(3,K)
C
      X21=X(1,M(2))-X(1,M(1))
      X13=X(1,M(1))-X(1,M(3))
      X32=X(1,M(3))-X(1,M(2))
C
      Y12=X(2,M(1))-X(2,M(2))
      Y31=X(2,M(3))-X(2,M(1))
      Y23=X(2,M(2))-X(2,M(3))
C
      DJ=X21*Y31-X13*Y12
      EPS=DJ/ABS(DJ)
C
C     CALCUL DE LA VITESSE NON PERTURBEE
C
      XB=(X(1,M(1))+X(1,M(2))+X(1,M(3)))/3
      YB=(X(2,M(1))+X(2,M(2))+X(2,M(3)))/3
      D=(XB**2+YB**2)**2
C
      A1K=1-(XB**2-YB**2)/D
      A2K=-2*XB*YB/D
C     ECRITURE SUR LE FICHIER BVITN
      WRITE(13,12)A1K,A2K
C
C     CALCUL DE LA FORCE DE VOLUME
C
      LG=10
      XI=0
      EX=0.
      EY=0.
      SIGM=1
      DO 123 MM=1,2
      IF(MM.EQ.2) SIGM=-1
      RAC=XB*XB+(YB-SIGM)*(YB-SIGM)
      EX=EX-2*SIGM*LG*XB/RAC/SQRT(RAC+LG*LG)
      EY=EY-2*SIGM*LG*(YB-SIGM)/RAC/SQRT(RAC+LG*LG)
  123 CONTINUE
      XI=1/2.995
      F1=EY*XI
      F2=-EX*XI
C     ECRITURE SUR LE FICHIER BFORC
      WRITE(14,12) F1,F2
   12 FORMAT(2E14.7)
  200   CONTINUE
        STOP
        END
```

```
TRA,T60,CM50000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,BENSONBIB,ID=BIBLI.
LIBRARY(LIB).
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE14,BFORC,ID=GEPAN.
FTN.
LGO.
*EOR
      PROGRAM TRACE(TAPE10,TAPE14)
C*************************************************************
C***** TRACE BENSON DU CHAMP DE VITESSE NON PERTURBEE*******
C*****  ET DU CHAMP DE FORCE                         *******
C*************************************************************
C
C------DECLARATIONS-----------------------------------------
C
      REAL X(2,61),XI,YI,V(2,92),F(2,92)
      INTEGER NP,NE,NLI,NLP,IE(3,92),LP(10),LI(20)
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE------------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7 )
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
    3 FORMAT (3I5)
      READ (10,4) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    4 FORMAT (5I5)
C
C-----LECTURE DE LA VITESSE ET DE LA FORCE---------------------
C
      DO 200 K=1,NE
        READ (14,2) F(1,K),F(2,K)
  200 CONTINUE
C
C
C-----TRACE DE LA VITESSE NON PERTURBEE ......................
C
      CALL DPLMAN(5LGEPAN,3L146,2LPB,6LVITFOR,2LBN,2LBN,
     1            2LBN,1LN)
       CALL IBENA(ID,ID,ID)
      CALL ECHEL(2.5,2.5,40.,3.)
C
C-------CHAMP DE FORCE------------------------------
C
      DO 400 K=1,NE
        XI=(X(1,IE(1,K))+X(1,IE(2,K))+X(1,IE(3,K)))/3
        YI=(X(2,IE(1,K))+X(2,IE(2,K))+X(2,IE(3,K)))/3
        E=10.
        CALL CTRAS(XI,YI,F(1,K),F(2,K),E)
  400 CONTINUE
      CALL PNUMA (55.,10.,9999,0.,0.)
      STOP
      END
C
C
      SUBROUTINE CTRAS(X,Y,V1,V2,E)
      REAL X,Y,V1,V2,E
      CALL TRAS(X,Y,0)
      X=X+V1/E
      Y=Y+V2/E
      R=SQRT(V1**2+V2**2)
      IF (R.LT.1E-8) RETURN
      C=V1/R
      S=V2/R
      CALL TRAS(X,Y,1)
      CALL BECENS(X,Y,0,30,0.3,0.3,C,S)
      RETURN
      END
```

Planche 2

Champ électrique - électrodes diamétralement opposées

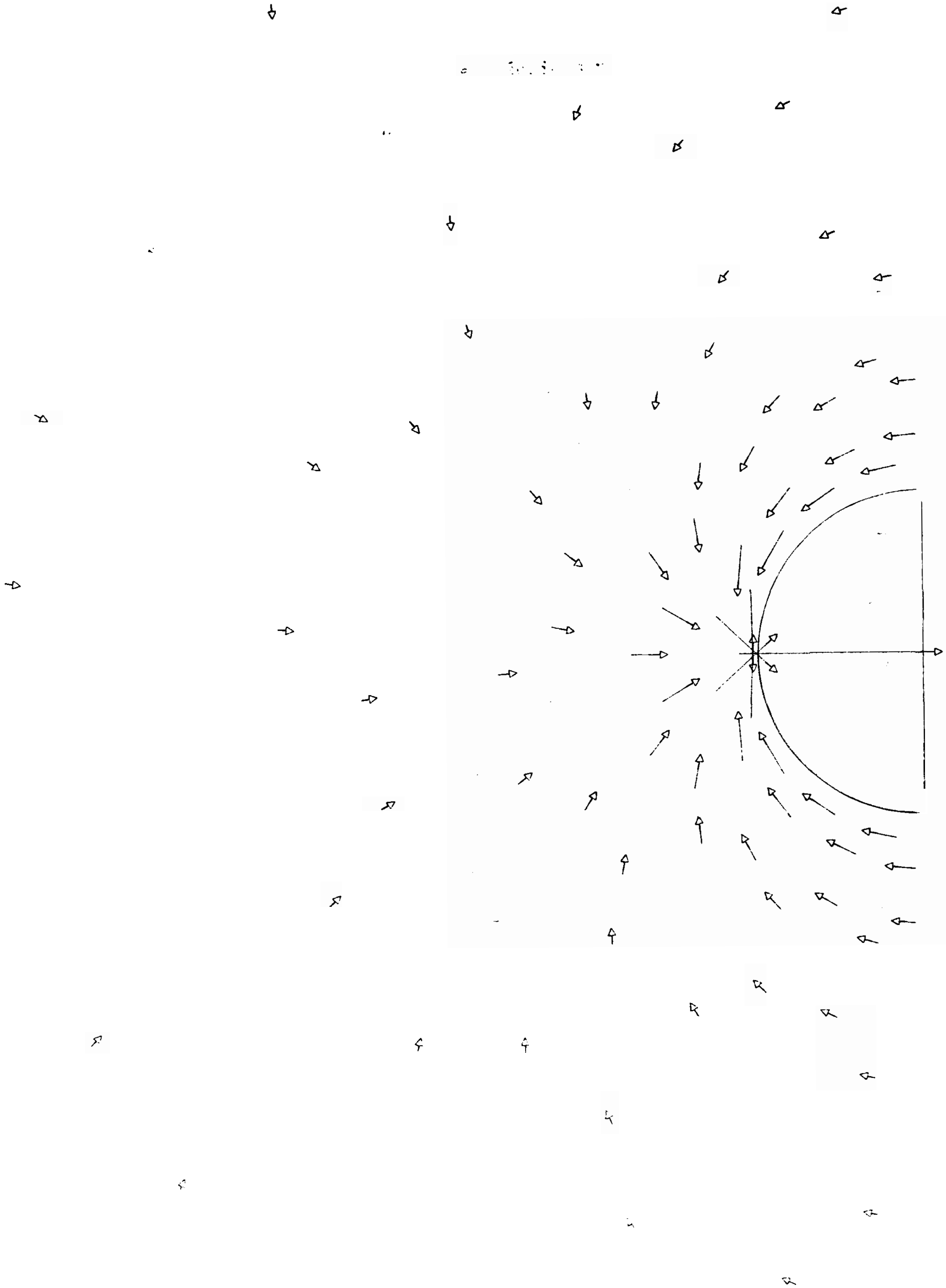
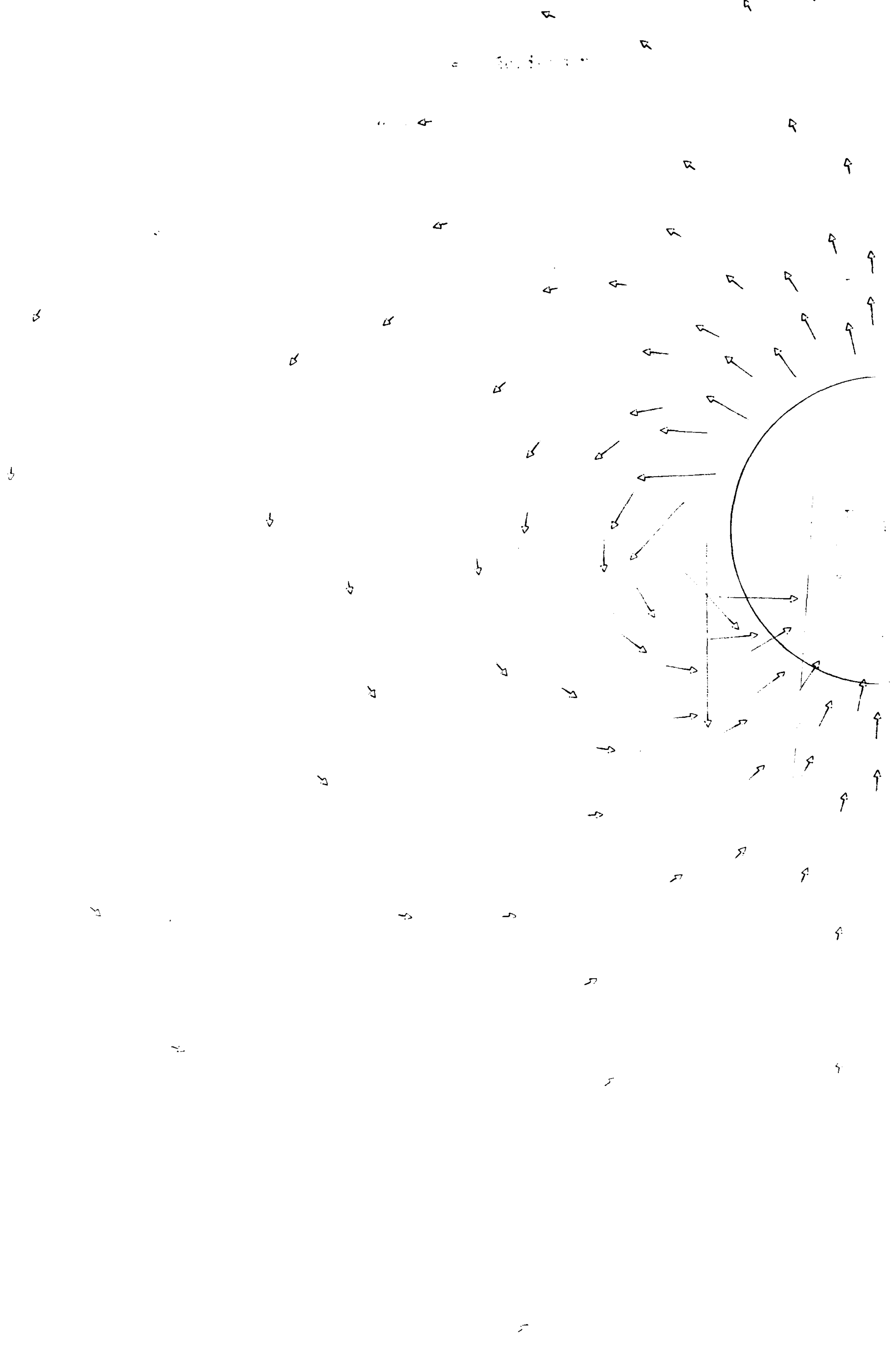


Planche 3

Champ de force Ordre I soit : $\vec{E_0} \wedge \vec{B}_{appliqué}$



```
MHD,T200,CM175000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,CNESLIB,ID=BIBLI.
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE13,BVITN,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE14,BFORC,ID=GEPAN.
LIBRARY(LIB).
PURGE,BVIT,ID=GEPAN.
RETURN,BVIT.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE12,PF.
FTN.
LGO.
CATALOG,TAPE12,BVIT,ID=GEPAN,RP=999.
*EOR
      PROGRAM MHD(TAPE10,TAPE12,TAPE13
     1,TAPE14)
C*****************************************************************
C****  MHD:ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE                    ****
C****            CALCUL A L'ORDRE 1.                          ****
C*****************************************************************
C
C
C
C-----DECLARATIONS-----------------------------------------
C
      REAL X(2,61),XB,YB,D,A1(45796),V(214)
      REAL VN(214),VT(214)
      REAL F1(250),F2(250)
      REAL A1K(100),A2K(100)
      RERL X21,X13,X32,Y12,Y23,X12,Y12
      REAL IL(214),IC(214),I1(3,3),I2(3,3),J1(3)
      REAL J2(3),DJ,EPS,A1K,A2K,F(214),F1,F2
      REAL SIG,R,F1I,F2I
      INTEGER IE(3,92),LI(10),LP(20),NE,NP,NLI,NLP,TE(122)
      INTECER M(3),CPT,P,Q1,Q2,Q3,Q4,DT,PI,Q
C
C-----INITIALISATIONS--------------------------------------
C
      DO 2100 I=1,45796
        A1(I)=0.
 2100 CONTINUE
      DO 2200 I=1,214
        V(I)=0.
        F(I)=0.
 2280 CONTINUE
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE----------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
      READ (10,9) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    3 FORMAT (3I5)
    9 FORMAT (5I5)
      Q=2*NP+NE
C
C-----CALCUL DES MATRICES A,B,C----------------------------
C
      DO 200 K=1,NE
      READ(14,12)F1(K),F2(K)
        READ(13,12) A1K(K),A2K(K)
C
C       INTERMEDIAIRES DE CALCUL
C
        M(1)=IE(1,K)
        M(2)=IE(2,K)
        M(3)=IE(3,K)
C
        X21=X(1,M(2))-X(1,M(1))
        X13=X(1,M(1))-X(1,M(3))
        X32=X(1,M(3))-X(1,M(2))
C
        Y12=X(2,M(1))-X(2,M(2))
        Y31=X(2,M(3))-X(2,M(1))
        Y23=X(2,M(2))-X(2,M(3))
C
        DJ=X21*Y31-X13*Y12
        EPS=DJ/ABS(DJ)
C
C       CRLCUL DE LA VITESSE NON PERTURBEE
C       CALCUL DES AATRICES ELEMENTAIRES
C
C       CALCUL DE I1K
        I1(1,1)=EPS*Y23/6
        I1(2,1)=I1(1,1)
        I1(3,1)=I1(1,1)
        I1(1,2)=EPS*Y31/6
        I1(2,2)=I1(1,2)
        I1(3,2)=I1(1,2)
        I1(1,3)=EPS*Y12/6
        I1(2,3)=I1(1,3)
        I1(3,3)=I1(1,3)
C
C       CALCUL DE I2K
        I2(1,1)=EPS*X32/6
        I2(2,1)=I2(1,1)
        I2(3,1)=I2(1,1)
        I2(1,2)=EPS*X13/6
        I2(2,2)=I2(1,2)
        I2(3,2)=I2(1,2)
        I2(1,3)=EPS*X21/6
        I2(2,3)=I2(1,3)
        I2(3,3)=I2(1,3)
C
C       CRLCUL DE J1K ET J2K
        J1(1)=EPS*Y23/2
        J1(2)=EPS*Y31/2
        J1(3)=EPS*Y12/2
C
        J2(1)=EPS*X32/2
        J2(2)=EPS*X13/2
        J2(3)=EPS*X21/2
C
C       RANCENENT DANS A
C
        DO 300 I=1,3
          DO 400 J=1,3
            Q1=Q*(2*M(I)-2)+2*M(J)-1
```

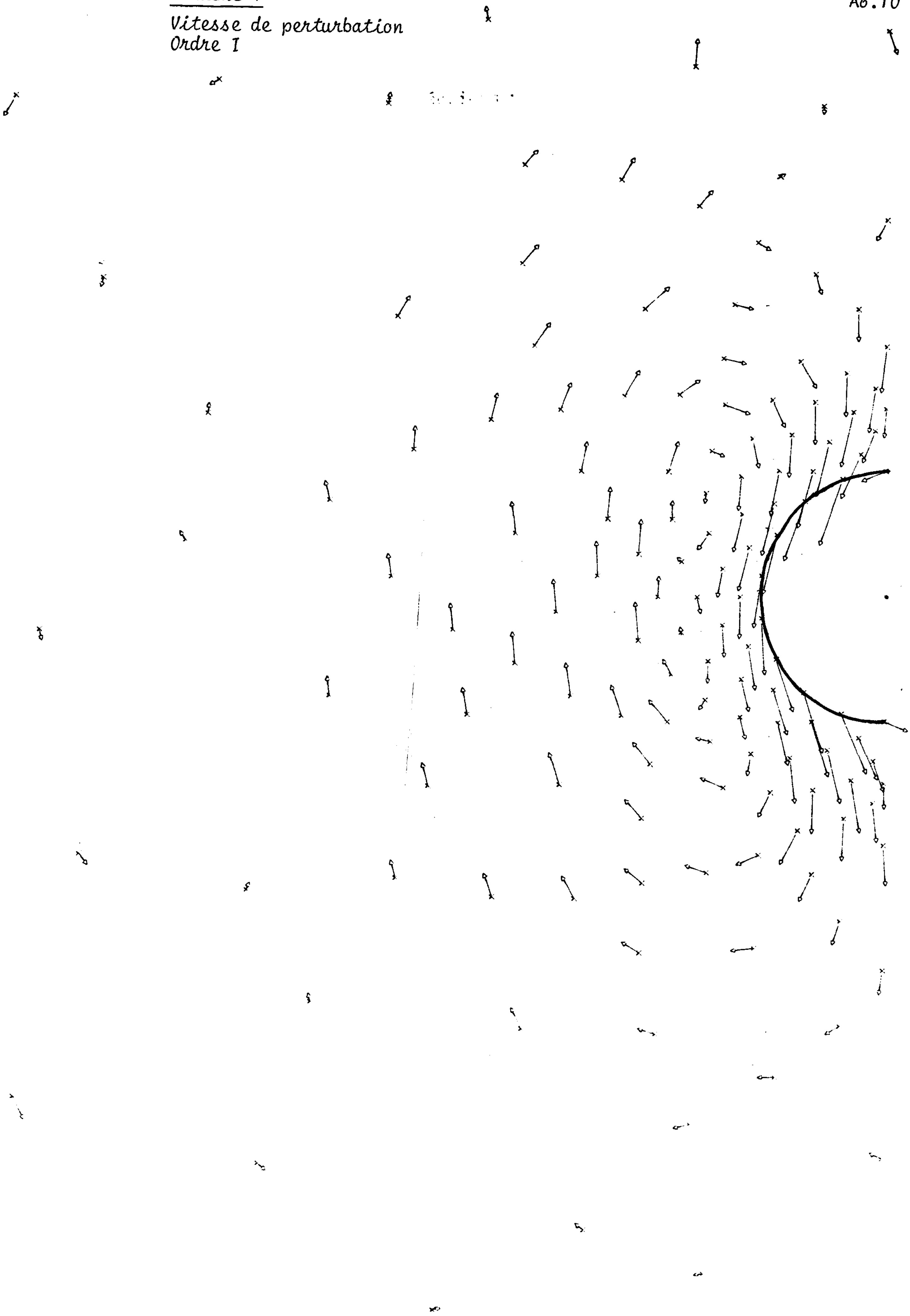
```
      Q2=Q*(2*M(I)-1)+2*M(J)
      Q3=Q*(2*M(I)-2)+2*M(J)
      Q4=Q*(2*M(I)-1)+2*M(J)-1
C
      A1(Q1)=A1(Q1)+A1K(K)*2*I1(I,J )+A2K(K)*I2(I,J)
      A1(Q2)=A1(Q2)+A1K(K)*I1(I,J)+2*A2K(K)*I2(I,J)
      A1(Q3)=A1(Q3)+A2K(K)*I1(I,J)
      A1(Q4)=A1(Q4)+A1K(K)*I2(I,J)
  400 CONTINUE
  300 CONTINUE
C
C     RANGEMENT DANS B
C
      DO 500 I=1,3
        Q1=Q*2*NP+Q*(K-1)+2*M(I)-1
        Q2=Q*2*NP+Q*(K-1)+2*M(I)
C
        A1(Q1)=A1(Q1)+J1(I)
        A1(Q2)=A1(Q2)+J2(I)
  500 CONTINUE
C
C     RANGEMENT DANS LE SECOND MEMBRE
C
      DO 600 I=1,3
        Q1=2*M(I)-1
        Q2=2*M(I)
C
        F(Q1)=F(Q1)-ABS(DJ)*F1(K)/6
        F(Q2)=F(Q2)-ABS(DJ)*F2(K)/6
  699 CONTINUE
C
  200 CONTINUE
C
C     RANGEMENT DANS C
C
      DO 700 J=1,NE
        DO 888 I=1,NP
          Q1=Q*2*NP+Q*(J-1)+2*I-1
          Q2=2*NP*(2*I-1)+NE*(2*I-2)+J
          Q3=Q*2*NP+Q*(J-1)+2*I
          Q4=2*NP*(2*I)+NE*(2*I-1)+J
C
          A1(Q2)=A1(Q1)
          A1(Q4)=A1(Q3)
  800   CONTINUE
  700 CONTINUE
C
C
C     CALCUL DE LA CONTRIBUTION DE LA FRONTIERE
C
      DO 900 PI=1,2
        P=PI-1
        IMAX=P*NLP+(1-P)*NLI-1
        DO 1000 I=1,IMAX
          M(1)=P*LP(I)+(1-P)*LI(I)
          M(2)=P*LP(I+1)+(1-P)*LI(I+1)
C
C         RECHERCHE DU NUMERO DU TRIANGLE
          DO 1100 N=1,NE
            CPT=0
            DO 1200 J=1,3
              IF (M(1).EQ.IE(J,N)) CPT=CPT+1
              IF (M(2).EQ.IE(J,N)) CPT=CPT+1
 1200       CONTINUE
            IF (CPT.EQ.2) GOTO 1300
 1100     CONTINUE
 1300     CONTINUE
          K=N
C
C         CALCUL ET CHARGEMENT DANS B
          X12=X(1,M(1))-X(1,M(2))
          Y12=X(2,M(1))-X(2,M(2))
          Q1=Q*2*NP+Q*(K-1)+2*M(1)-1
          Q2=Q*2*NP+Q*(K-1)+2*M(2)-1
          Q3=Q*2*NP+Q*(K-1)+2*M(1)
          Q4=Q*2*NP+Q*(K-1)+2*M(2)
C
          A1(Q1)=A1(Q1)-Y12*(2*P-1)/2
          A1(Q2)=A1(Q2)-Y12*(2*P-1)/2
          A1(Q3)=A1(Q3)+X12*(2*P-1)/2
          A1(Q4)=A1(Q4)+X12*(2*P-1)/2
C
 1000   CONTINUE
C
  980 CONTINUE
C
C
C-----REGULARISATION DU SYSTEME LINEAIRE--------------------
C
C
C      ON FIXE LA PRESSION DU TRIANGLE 10 A 0.
      DO 3900 I=1,Q
        A1(Q*(2*NP+9)+I)=0.
        A1(Q*(I-1)+2*NP+10)=0.
 3900 CONTINUE
        A1(Q*(2*NP+9)+2*NP+10)=1.
C
C-----VISUALISATION DES MATRICES A , B , C------------------
C-----RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE------------------------
C
C
      CALL IMMGJ(A1,Q,DT,IL,IC,0)
      IF (DT.EQ.0) WRITE (11,4)
    4 FORMAT (2X,*----------MTRICE SINGULIERE..CA CHIE.....
*)
      DO 1400 J=1,Q
        DO 1500 I=1,Q
          V(J)=V(J)+A1(Q*(I-1)+J)*F(I)
 1500   CONTINUE
 1400 CONTINUE
C
C-----ECRITURE DES RESULTATS SUR OUTPUT ET BUIT-------------
C
      DO 1600 I=1,NP
      WRITE(12,12) V(I*2-1),V(2*I)
 1600 CONTINUE
   12   FORMAT (2E14.7)
      PI=2*NP+1
      DO 1700 I=PI,Q
        J=I-2*NP
        WRITE (12,12) V(I)
 1700 CONTINUE
      STOP
```

```
MHD,T100,CM100000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,CNESLIB,ID=BIBLI.
ATTACH,TAPE12,BVIT,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
LIBRARY(LIB).
PURGE,VITCDG,ID=GEPAN.
RETURN,VITCDG.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE20,PF.
PURGE,COODCDG,ID=GEPAN.
RETURN,COODCDG.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE21,PF.
FTN.
LGO.
CATALOG,TAPE20,VITCDG,ID=GEPAN,RP=999.
CATALOG,TAPE21,COODCDG,ID=GEPAN,RP=999.
*EOR
      PROGRAM MHD(OUTPUT,TAPE10,TAPE11=OUTPUT,TAPE20
     1,TAPE21,TAPE12)
C**************************************************************
C****  CALCUL DE LA VITESSE AU CENTRE DE CHAQUE           ****.
C****    ELEMENT PAR UNE METHODE D INTERPOLATION          ****
C**************************************************************
C
C
C
C-----DECLARATIONS------------------------------------------
C
      REAL X(2,61)
      REAL V(184)
      REAL X21,X13,X32,Y12,Y23,X12,Y12
      REAL VIP(184)
      REAL IL(214),IC(214),I1(3,3),I2(3,3),J1(3)
      REAL J2(3),DJ,EPS,A1K,A2K,F(214),F1,F2
      REAL SIG,R,F1I,F2I
      INTEGER IE(3,92),LI(10),LP(20),NE,NP,NLI,NLP,TE(122)
      INTECER M(3),CPT,P,Q1,Q2,Q3,Q4,DT,PI,Q
C
C-----INITIALISATIONS--------------------------------------
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE----------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
      READ (10,9) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    3 FORMT (3I5)
    9 FORMAT (5I5)
      Q=2*NP+NE
      WRITE (11,1) NP,NE,NLP,NLI
      READ(12,12)(V(I),I=1,122)
C
C-----CALCUL DES MATRICES A,B,C----------------------------
C
      DO 200 K=1,NE
C
        KK=2*K-1
      VIP(KK)=0.
      VIP(KK+1)=0.
C     INTERAEDIAIRES DE CALCUL
C
      M(1)=IE(1,K)
      M(2)=IE(2,K)
      M(3)=IE(3,K)
C
      XB=(X(1,M(1))+X(1,M(2))+X(1,M(3)))/3
      YB=(X(2,M(1))+X(2,M(2))+X(2,M(3)))/3
C     ECRITURE SUR LE FICHIER COORCDG
      WRITE(21,12)XB,YB
C
      DO 300 I=1,3
      VIP(KK)=VIP(KK)+V(2*M(I)-1)/3
      VIP(KK+1)=VIP(KK+1)+V(2*M(I))/3
  300 CONTINUE
      WRITE(20,12) VIP(KK),VIP(KK+1)
   12 FORMAT(2E14.7)
  200 CONTINUE
         STOP
         END
*EOR
```

```
TRA,T100,CM=100000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,BENSONBIB,ID=BIBLI.
LIBRARY(LIB).
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE11,BVIT,ID=GEPAN.
FTN(A),R=3.
ATTACH,TAPE20,VITCDG,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE21,COODCDG,ID=GEPAN.
LGO.
*EOR
      PROGRAM TRACE(TAPE10,TAPE11,TAPE20,TAPE21)
C*************************************************************
C******  TRACE BENSON DES VITESSES DE PERTURBATION ***********
C*************************************************************
C
C------DECLARATIONS-------------------------------------------
C
      REAL X(2,61),XI,YI,V(2,61),R,C,S
      REAL VIP(184),XB(92),YB(92)
      INTEGER NP,NE,NLI,NLP,IE(3,92),LP(20),LI(10)
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE------------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
    3 FORMAT (3I5)
      READ (10,4) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    4 FORMAT (5I5)
C
C-----LECTURE DES VITESSES-------------------------------------
C
      DO 200 I=1,61
        READ (11,5) V(1,I),V(2,I)
    5 FORMAT (2E14.7)
  200 CONTINUE
C
C------TRACE DU CHAMP DE VITESSE-----------------------------
C
      CALL DPLMAN(5LGEPAN,3L146,2LPB,8LVITESSES,2LBN,2LBN,
     1            2LBN,1LN)
       CALL IBENA(ID,ID,ID)
      CALL ECHEL(2.6,2.6,46.,3.)
      DO 300 I=1,NP
        XI=X(1,I)
        YI=X(2,I)
        CALL BECENS(XI,YI,0,10,0.1,0.1,1.,0.)
        XI=XI+V(1,I)/10.
        YI=YI+V(2,I)/10.
        CALL TRAS(XI,YI,1)
        R=SQRT(V(1,I)**2+V(2,I)**2)
        C=V(1,I)/R
        S=V(2,I)/R
        CALL BECENS(XI,YI,0,30,0.2,0.2,C,S)
  300 CONTINUE
      READ(20,5)VIP
      DO 600 I=1,92
        READ(21,2)XB(I),YB(I)
  600 CONTINUE
      DO 500 I=1,92
        XI=XB(I)
        YI=YB(I)
        CALL BECENS(XI,YI,0,10,0.1,0.1,1.,0.)
        XI=XI+VIP(2*I-1)/10.
        YI=YI+VIP(2*I)/10.
        CALL TRAS(XI,YI,1)
        R=SQRT(VIP(2*I-1)*VIP(2*I-1)+VIP(2*I)*VIP(2*I))
        C=VIP(2*I-1)/R
        S=VIP(2*I)/R
        CALL BECENS(XI,YI,0,30,0.2,0.2,C,S)
  500 CONTINUE
      CALL PNUMA (55.,10.,9999,0.,0.)
      STOP
      END
```

Planche 4

Vitesse de perturbation
Ordre I



```
TRA,T100,CM=100000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,BENSONBIB,ID=BIBLI.
LIBRARY(LIB).
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE11,BVIT,ID=GEPAN.
FTN(A),R=3.
ATTACH,TAPE20,VITCDG,ID=GEPAN.
ATTACH,TAPE21,COODCDG,ID=GEPAN.
LGO.
*EOR
      PROGRAM TRACE(TAPE10,TAPE11,TAPE20,TAPE21)
C*************************************************************
C******  TRACE BENSON ECOULEMENT POTENTIEL ET         ********
C******          ECOULEMENT RESULTANT                 ********
C*************************************************************
C
C------DECLARATIONS-------------------------------------------
C
      REAL X(2,61),XI,YI,V(2,61),R,C,S
      REAL VIP(184),XB(92),YB(92)
      INTEGER NP,NE,NLI,NLP,IE(3,92),LP(20),LI(10)
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE-------------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
    3 FORMAT (3I5)
      READ (10,4) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    4 FORMAT (5I5)
C
C-----LECTURE DES VITESSES------------------------------------
C
      DO 200 I=1,61
        READ (11,5) V(1,I),V(2,I)
    5 FORMAT (2E14.7)
  200 CONTINUE
C
C------TRACE DU CHAMP DE VITESSE-----------------------------
C
      CALL DPLMAN(5LGEPAN,3L146,2LPB,8LVITESSES,2LBN,2LBN,
     1            2LBN,1LN)
       CALL IBENA(ID,ID,ID)
      CALL ECHEL(2.6,2.6,46.,3.)
       READ(20,5) VIP
       DO 600 I=1,92
       READ(21,2) XB(I),YB(I)
 600   CONTINUE
C
       DO 900 J=1,2
       SIGM=1
       IF(J.EQ.2) SIGM=0
       DO 800 I=1,92
       XI=XB(I)
       YI=YB(I)
       CALL BECENS(XI,YI,0,10,0.1,0.1,1.,0.)
       D=(XI*XI+YI*YI)**2
       A1K=(1-(XI*XI-YI*YI))/D
       A2K=-2*XI*YI/D
       AA=A1K/10+SIGM*VIP(2*I-1)/20
       BB=A2K/10+SIGM*VIP(2*I)/20
       XI=XI+AA
       YI=YI+BB
       CALL TRAS(XI,YI,1)
       R=SQRT(AA*AA+BB*BB)
       C=AA/R
       S=BB/R
       CALL BECENS(XI,YI,0,30,0.2,0.2,C,S)
 800   CONTINUE
 900   CONTINUE
       CALL PNUMA(55.,10.,9999,0.,0.)
       STOP
       END
```

Planche 4bis :

```
MHD,T100,CM100000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,CNESLIB,ID=BIBLI.
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
LIBRARY(LIB).
PURGE,BVITN,ID=GEPAN.
RETURN,BVITN.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE13,PF.
PURGE,BFORC,ID=GEPAN.
RETURN,BFORC.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE14,PF.
FTN.
LGO.
CATALOG,TAPE13,BVITN,ID=GEPAN,RP=999.
CATALOG,TAPE14,BFORC,ID=GEPAN,RP=999.
*EOR
      PROGRAM MHD(OUTPUT,TAPE10,TAPE11=OUTPUT,TAPE13
     1,TAPE14)
C*****************************************************************
C****   FORCE DE VOLUME CREEE PAR 2 ELECTRODES +V,-V         ****
C****                DE LONGUEUR FINIE LG                    ****
C****       ORDRE I*RM SOIT: E ELEC X B INDUIT               ****
C*****************************************************************
C
C
C-----DECLARATIONS-------------------------------------------
C
      REAL X(2,61)
      REAL VN(214),VT(214)
      REAL X21,X13,X32,Y12,Y23,X12,Y12
      REAL IL(214),IC(214),I1(3,3),I2(3,3),J1(3)
      REAL J2(3),DJ,EPS,A1K,A2K,F(214),F1,F2
      REAL SIG,R,F1I,F2I
      INTEGER IE(3,92),LI(10),LP(20),NE,NP,NLI,NLP,TE(122)
      INTEGER M(3),CPT,P,Q1,Q2,Q3,Q4,DT,PI,Q
C
C-----INITIALISATIONS----------------------------------------
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE------------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
      READ (10,9) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    3 FORMAT (3I5)
    9 FORMAT (5I5)
      Q=2*NP+NE
      WRITE (11,1) NP,NE,NLP,NLI
C
C
      DO 200 K=1,NE
C
C       INTERMEDIAIRES DE CALCUL
C
        M(1)=IE(1,K)
        M(2)=IE(2,K)
        M(3)=IE(3,K)
C
        X21=X(1,M(2))-X(1,M(1))
        X13=X(1,M(1))-X(1,M(3))
        X32=X(1,M(3))-X(1,M(2))
C
        Y12=X(2,M(1))-X(2,M(2))
        Y31=X(2,M(3))-X(2,M(1))
        Y23=X(2,M(2))-X(2,M(3))
C
        DJ=X21*Y31-X13*Y12
        EPS=DJ/ABS(DJ)
C
C
C       CALCUL DE LA FORCE DE VOLUME
C
        LG=10
        XI=0
        EX=0.
        EY=0.
        SIGM=1
        DO 123 MM=1,2
        IF(MM.EQ.2) SIGM=-1
        RAC=XB*XB+(YB-SIGM)*(YB-SIGM)
        EX=EX-2*SIGM*LG*XB/RAC/SQRT(RAC+LG*LG)
        EY=EY-2*SIGM*LG*(YB-SIGM)/RAC/SQRT(RAC+LG*LG)
  123   CONTINUE
        R=SQRT(XB*XB+YB*YB)
        COTE=XB/R
        SITE=YB/R
        IF(COTE.LT.0) SIG=1
        IF(COTE.GT.0) SIG=-1
        IF(ABS(COTE).LT.1.E-7) XI=0.
        IF(ABS(COTE).GT.1E-7)
     1  XI=ATAN((R+SITE)/COTE)+ATAN((R-SITE)/COTE)-
     2     SIG*3.14159265/2.995
        XI=XI*LG/SQRT(R*R+LG*LG)
        F1=EY*XI
        F2=-EX*XI
C       ECRITURE SUR LE FICHIER BFORC
        WRITE(14,12) F1,F2
   12   FORMAT(2E14.7)
  200      CONTINUE
           STOP
           END
```

Planche 5 :

Champ de forces ordre IR_m

Soit : $\vec{E_a} \wedge \vec{B}$ induit

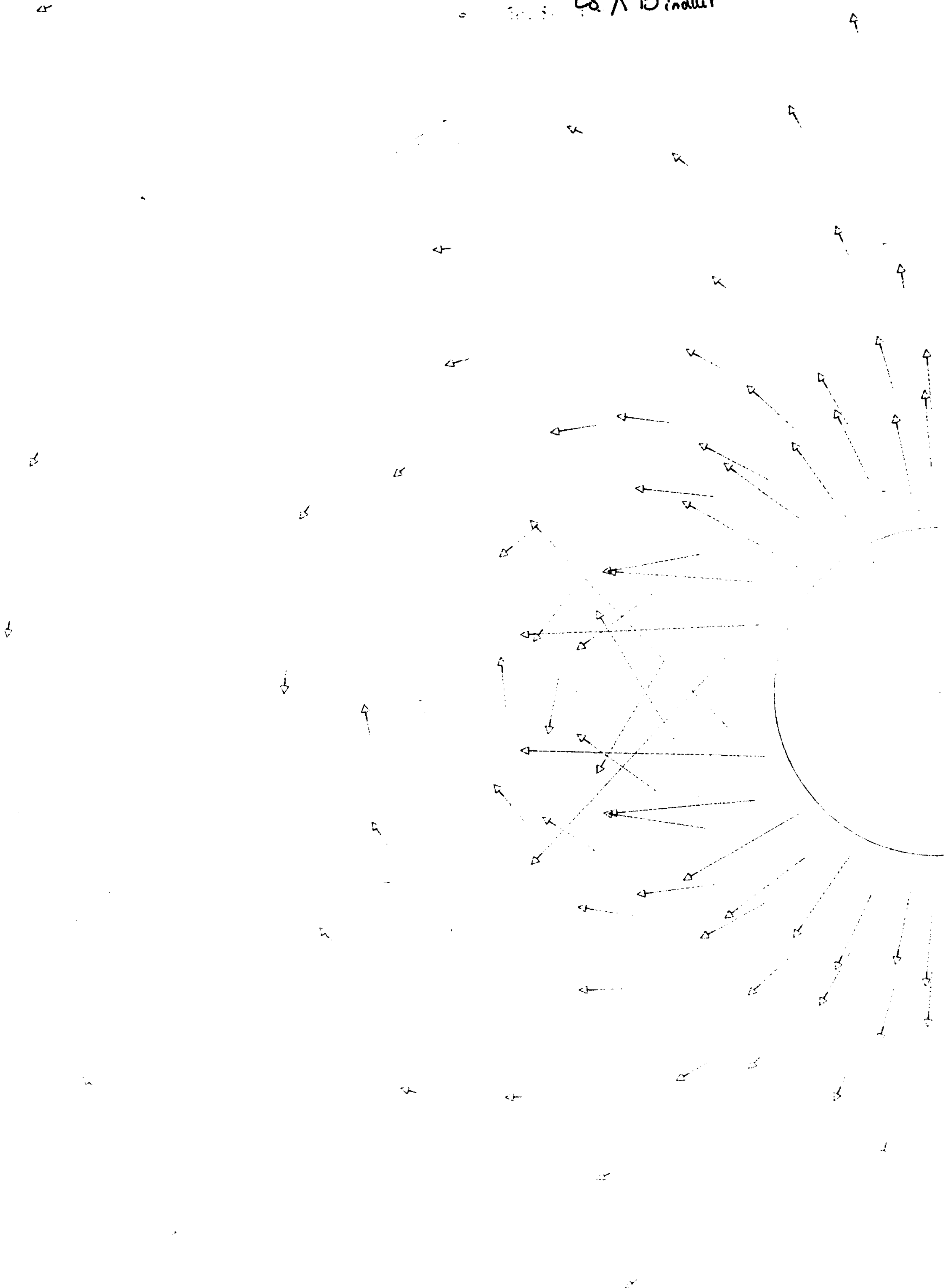
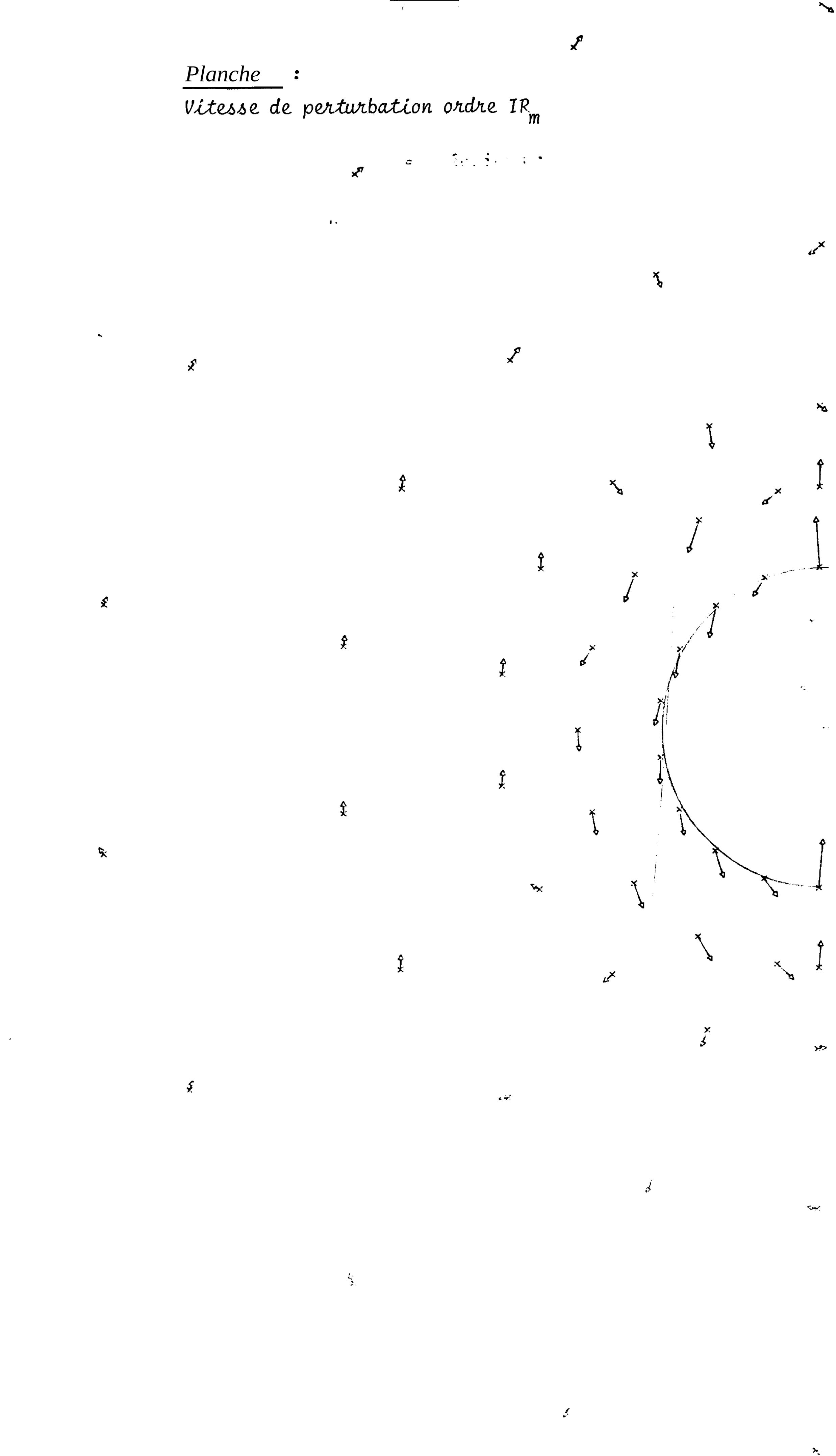


Planche :

Vitesse de perturbation ordre IR_m



```
MHD,T100,CM100000.
ACCOUNT,PROJET,DCTGE,PETUDE,C146.
ATTACH,LIB,CNESLIB,ID=BIBLI.
ATTACH,TAPE10,BFICH1,ID=GEPAN.
LIBRARY(LIB).
PURGE,BVITN,ID=GEPAN.
RETURN,BVITN.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE13,PF.
PURGE,BFORC,ID=GEPAN.
RETURN,BFORC.
EXIT,U.
REQUEST,TAPE14,PF.
FTN.
LGO.
CATALOG,TAPE13,BVITN,ID=GEPAN,RP=999.
CATALOG,TAPE14,BFORC,ID=GEPAN,RP=999.
*EOR
      PROGRAM MHD(OUTPUT,TAPE10,TAPE11=OUTPUT,TAPE13
     1,TAPE14)
C***********************************************************
C****   FORCE DE VOLUME CREEE PAR 2 ELECTRODES +V,-V      ****
C****             DE LONGUEUR FINIE LG                    ****
C****           FORMANT UN ANGLE DE 2*PI/3                ****
C****         E REEL FINI , B APPLIQUE                    ****
C***********************************************************
C
C
C
C-----DECLARATIONS------------------------------------------
C
      REAL X(2,61)
      REAL VN(214),VT(214)
      REAL X21,X13,X32,Y12,Y23,X12,Y12
      REAL IL(214),IC(214),I1(3,3),I2(3,3),J1(3)
      REAL J2(3),DJ,EPS,A1K,A2K,F(214),F1,F2
      REAL SIG,R,F1I,F21
      INTEGER IE(3,92),LI(10),LP(20),NE,NP,NLI,NLP,TE(122)
      INTEGER M(3),CPT,P,Q1,Q2,Q3,Q4,DT,PI,Q
C
C-----INITIALISATIONS---------------------------------------
C
C-----LECTURE DU MAILLAGE-----------------------------------
C
      READ (10,1) NP,NE,NLI,NLP
    1 FORMAT (4I5)
      DO 100 I=1,NP
        READ (10,2) X(1,I),X(2,I)
  100 CONTINUE
    2 FORMAT (2E14.7)
      READ (10,3) ((IE(I,N),I=1,3),N=1,NE)
      READ (10,9) (LI(I),I=1,NLI),(LP(I),I=1,NLP)
    3 FORMAT (3I5)
    9 FORMAT (5I5)
      Q=2*NP+NE
      WRITE (11,1) NP,NE,NLP,NLI
C
C-----CALCUL DES MATRICES A,B,C-----------------------------
C
      DO 200 K=1,NE
C
C       INTERMEDIAIRES DE CALCUL
C
      M(1)=IE(1,K)
      M(2)=IE(2,K)
      M(3)=IE(3,K)
C
      X21=X(1,M(2))-X(1,M(1))
      X13=X(1,M(1))-X(1,M(3))
      X32=X(1,M(3))-X(1,M(2))
C
      Y12=X(2,M(1))-X(2,M(2))
      Y31=X(2,M(3))-X(2,M(1))
      Y23=X(2,M(2))-X(2,M(3))
C
      DJ=X21*Y31-X13*Y12
      EPS=DJ/ABS(DJ)
C
C     CALCUL DE LA VITESSE NON PERTURBEE
C
      XB=(X(1,M(1))+X(1,M(2))+X(1,M(3)))/3
      YB=(X(2,M(1))+X(2,M(2))+X(2,M(3)))/3
      D=(XB**2+YB**2)**2
C
      A1K=1-(XB**2-YB**2)/D
      A2K=-2*XB*YB/D
C     ECRITURE SUR LE FICHIER BVITN
      WRITE(13,12)A1K,A2K
C
C     CALCUL DE LA FORCE DE VOLUME
C
      LG=10
      FI=.5236
      EX=0.
      EY=0.
      SIGM=1
      DO 123 MM=1,2
      IF(MM.EQ.2) SIGM=-1
      X=XB+SIN(FI)
      Y=YB-SIGM*SIN(FI)
      RAC=X*X+Y*Y
      EX=EX-2*SIGM*LG*X/RAC/SQRT(RAC+LG*LG)
      EY=EY-2*SIGM*LG*Y/RAC/SQRT(RAC+LG*LG)
  123 CONTINUE
      XI=1/2.995
      F1=EY*XI
      F2=-EX*XI
C     ECRITURE SUR LE FICHIER BFORC
      WRITE(14,12) F1,F2
   12 FORMAT(2E14.7)
  200    CONTINUE
         STOP
         END
```

Planche 7 :

Champ électrique (électrode à $\pi/3$)

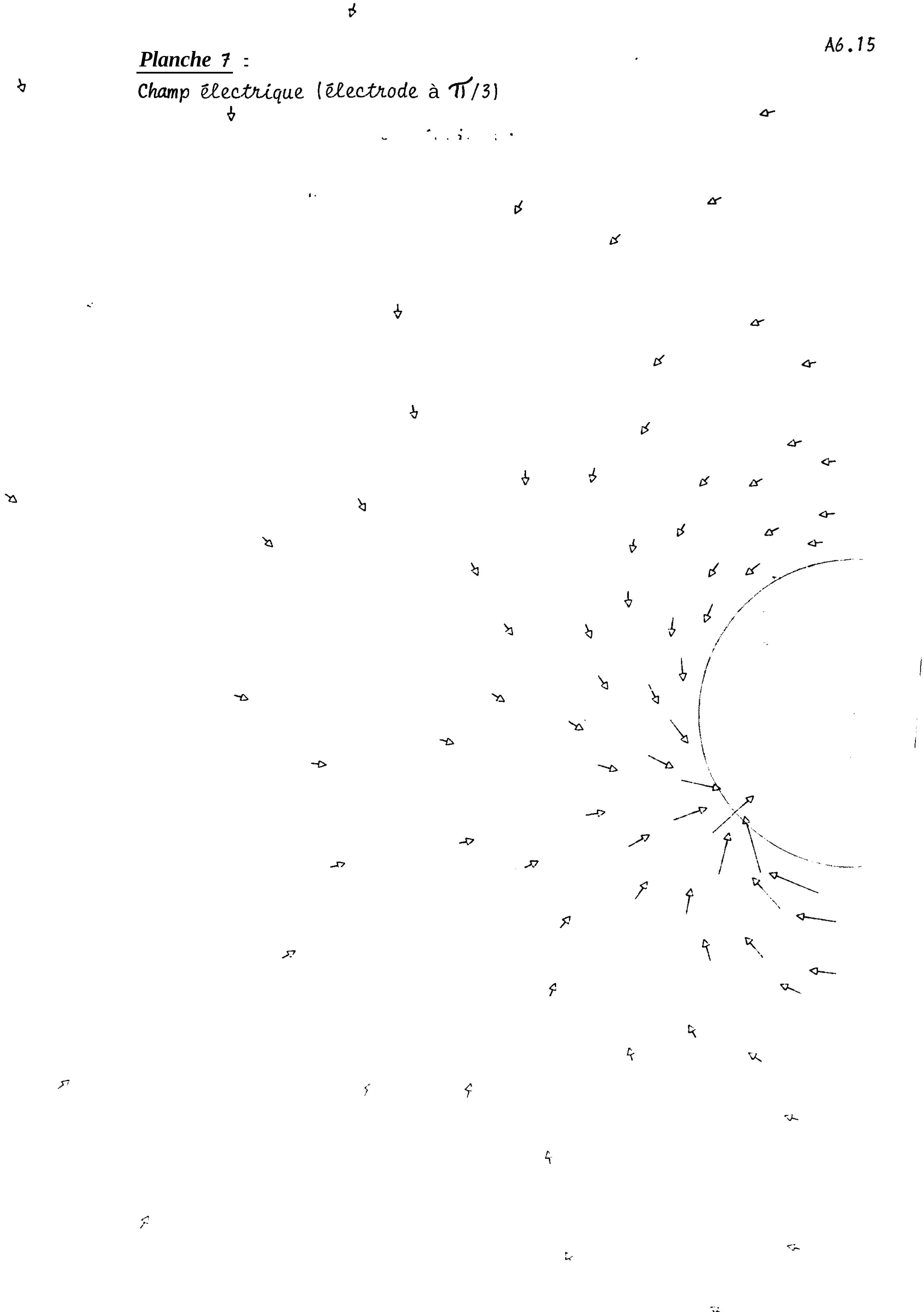


Planche 8 :

Champ de forces (électrode à $\pi/3$)

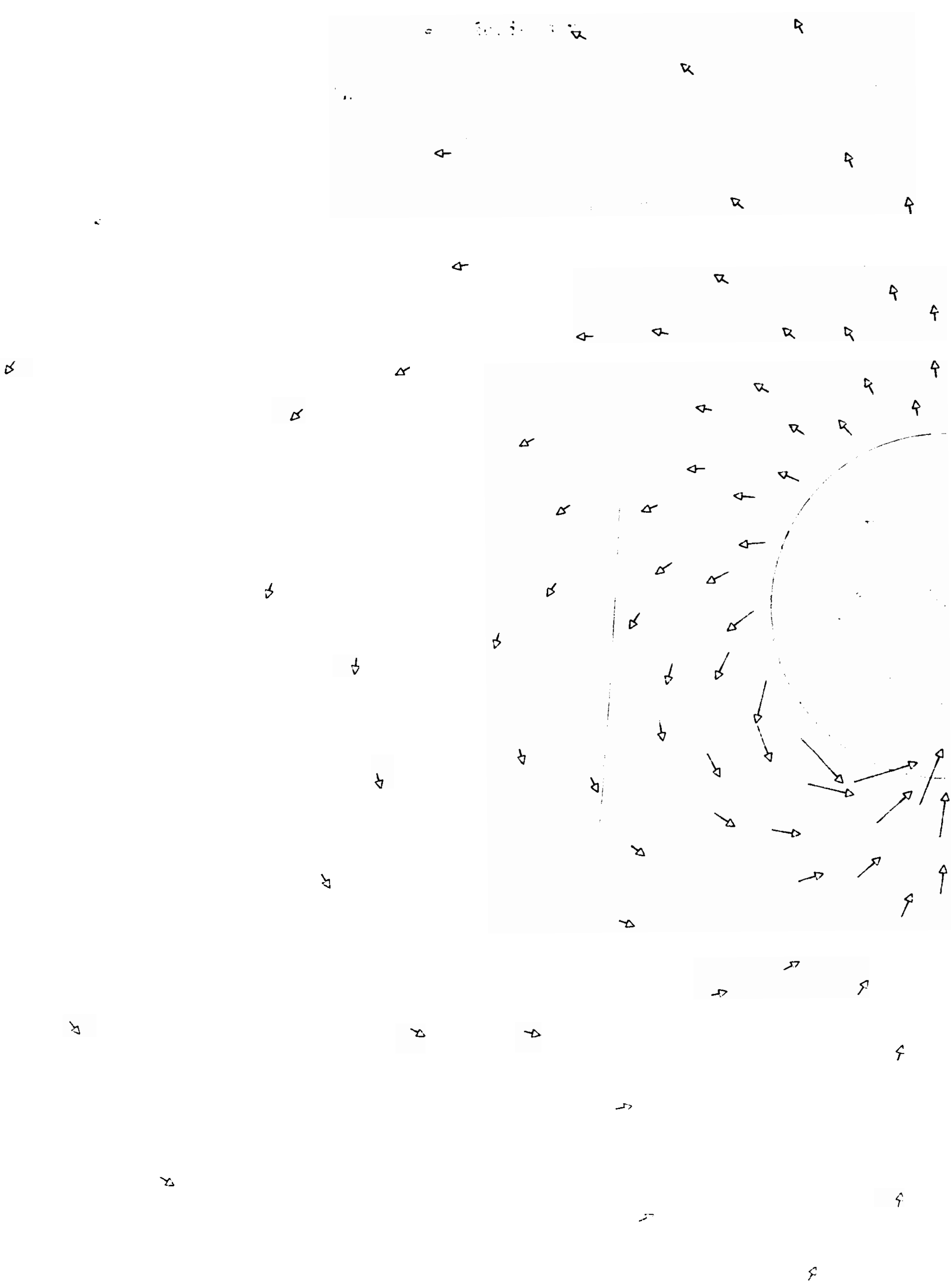
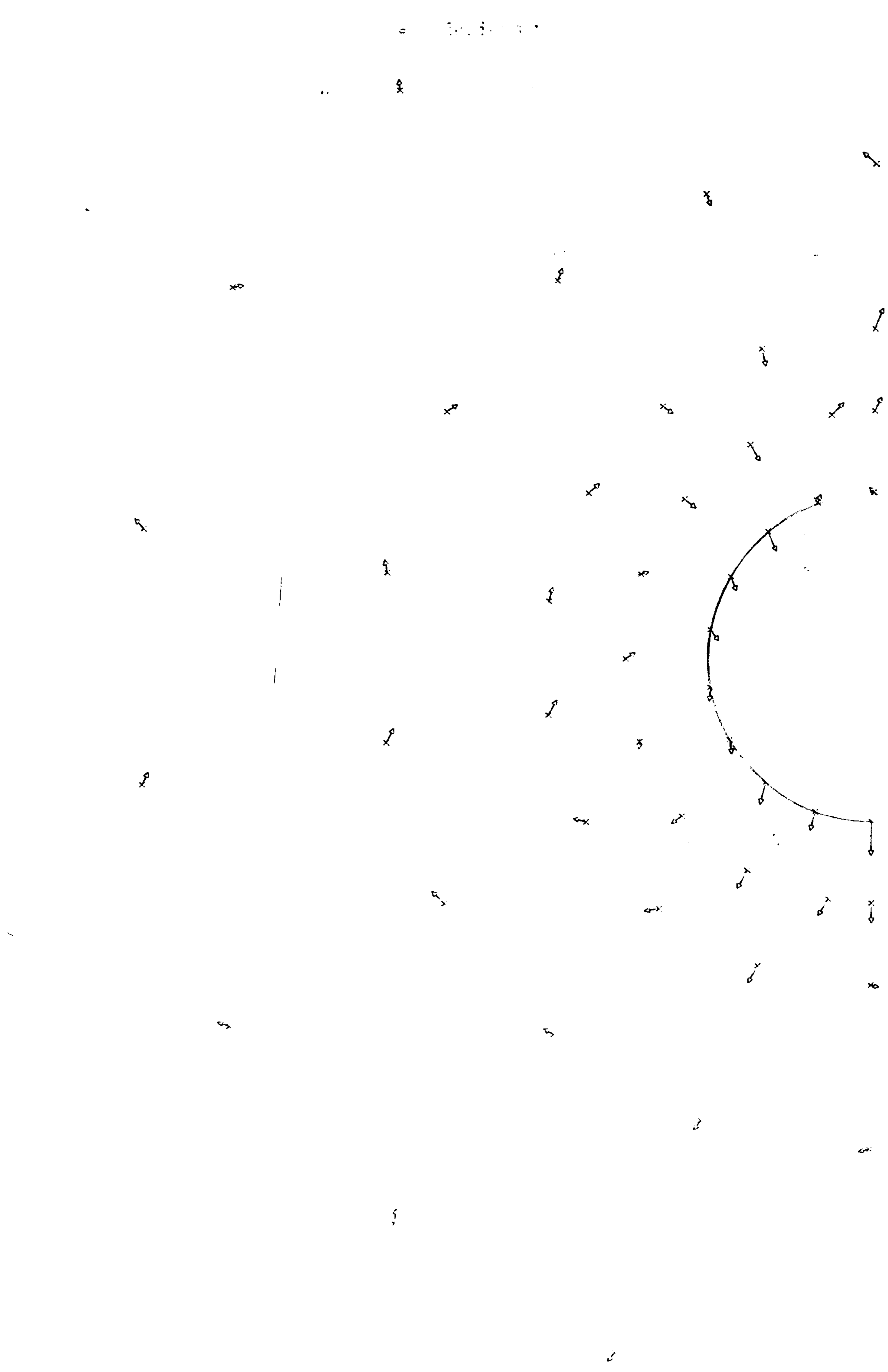


Planche 9 :

Vitesse de perturbation (électrode à $\pi/3$)



-▪- BIBLIOGRAPHIE -▪-

BIBLIOGRAPHIE

-*-=-=-*-=-*-

1 E. DURAND
Electrostatique - Masson

2 K. KARAMCHETI
Principles of Ideal - Fluid Aerodynamics - Krieger

3 LANDAU & LIFCHITZ
Electrodynamique des milieux continus - Edition de Moscou

4 T.G. COWLING
Magnétohydrodynamique - DUNOD

5 R. COMOLET
Mécanique des fluides - Masson

6 BRUN - MATHIEU
Mécanique des fluides - DUNOD

7 RAVIART
Les méthodes d'éléments finis en Mécanique des fluides - EVROLLES

8 I. SNEDDON
Eléments of partial differential equations

9 E. BERNARD - F. JEAN
Projet de fin d'études - E.N.S.A.E.

10 P. MARTY
Separation electromagnétique continue (thèse) - INP Grenoble