

Michel AGUADO

Jean-Marc CAZAUX

# Rapport de Stage

E F F E C T U E

A U C. N. E. S.

(service GEPAN)

du 06/09/1982 au 15/11/1982

R E M E R C I E M E N T S

R E M E R C I E M E N T S

-----

*Nous exprimons nos vifs remerciements à l'équipe du GEPAN, pour l'accueil qu'il nous a réservé durant les deux mois passés au sein de ce service, et plus particulièrement, nous remercions Monsieur Bernard ZAPPOLI, responsable du stage, pour son aimable collaboration et tous les bons conseils qu'il nous a prodigués.*

S O M M A I R E

# S O M M A I R E

## 1ère PARTIE : Le CNES, le GEPAN

- Description
- **Rôle** du CNES
- Objectifs du CNES
- Installations
- Présentation du **GEPAN**

## 2ème PARTIE : LA MAGNETOHYDRODYNAMIQUE (MHD)

- **Généralités** sur la MHD
- Rappel des équations de MHD

## 3ème PARTIE : ECOULEMENT AUTOUR D UN CYLINDRE MINI DE 2 ELECTRODES DIAMETRALEMENT OPPOSEES ET PLACE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE CONSTANT

- Définition de l'**écoulement** et hypothèses
- **Equations** générales
- Mise en équation du **système** approche

## 4ème PARTIE : RESOLUTION DANS LE CAS DES ELECTRODES OCCUPANT UN SECTEUR

- Résolution approchée
- Solution par **méthode variationnelle**

## CONCLUSION & OBJECTIFS

## ANNEXES

## BIBLIOGRAPHIE

1ÈRE P A R T I E

- Le C.N.E.S. - Le Gepan -

# LE C N E S - LE G E P A N

-----

## 1.1. DESCRIPTION

Crdd par la loi du 19.12.61, le Centre National d'Etudes Spatiales a commencé officiellement à fonctionner le 1er mars 1962, avec pour mission d'orienter et de développer des recherches nécessaires à la mise en oeuvre des moyens spatiaux. Le CNES est un établissement public, scientifique et technique, à caractère industriel et commercial, dont l'essentiel des ressources est constitué par des subventions de l'Etat. Ses effectifs s'élèvent à environ deux mille agents, essentiellement des ingénieurs, des techniciens et des employés administratifs.

## 1.2. ROLE DU CNES

Le CNES joue un rôle important sur trois plans :

- le plan national,
- le plan européen,
- le plan international.

### 1.2.1. Sur le plan national

Dès l'origine, le CNES a choisi de ne pas créer ses propres équipes scientifiques en recherche fondamentale et a décidé de s'appuyer sur les laboratoires du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) et des Universités, quitte à renforcer les moyens, notamment les équipements nécessaires à la réalisation des expériences spatiales embarquées sur satellites, sur le SPACELAB, sur les battons, voire sur les fusdes-sondes.

.../...

*Ces laboratoires ont, en général, le potentiel technique et humain nécessaire à la réalisation des expériences qu'ils proposent. Cependant, le Centre Spatial de Toulouse (CST) intervient à tous les niveaux de développement : assistance à la conception, coordination technique, assistance sur certains problèmes technologiques particuliers comme le contrôle thermique ou l'écriture et l'exploitation des logiciels de dépouillement. Le CNES joue aussi un rôle important dans la communauté scientifique particulièrement dans les domaines de l'astronomie et de la géophysique.*

*Au point de vue industrie, les activités spatiales sont à l'origine d'activités industrielles, dont l'importance ira en croissant avec le développement des applications. Elles apparaissent comme un élément fondamental de l'évolution technico-économique de la société, comparable dans son importance potentielle à l'apparition de l'énergie nucléaire, analogue dans ses conséquences au bouleversement que les ordinateurs apportent dans le domaine du traitement de l'information.*

*Actuellement, le secteur français emploie dix mille personnes, dont environ la moitié pour la seule industrie. Afin de mieux faire connaître leurs moyens et leurs produits, le CNES et les 41 sociétés ou organismes français ayant des activités dans le secteur spatial, ont créé un groupement d'intérêt économique (G.I.E. ) appelé PROSPACE. Ce groupement a pour tâche essentielle d'informer les professionnels de l'espace sur les produits spatiaux commercialisés par ses adhérents.*

#### 1.2.2. Sur le plan européen

*Le CNES représente la France auprès de l'Agence Spatiale Européenne (A.S.E. ) dont les dix pays membres sont : l'Allemagne, la Belgique, le Danemark, l'Espagne, la France, l'Italie, les Pays-Bas, le Royaume-Uni, la Suède et la Suisse. Le budget de l'A.S.E., en 1977, est de 2 600 millions de francs. La France contribue au budget général et au programme scientifique en fonction de son P.N.B. (Produit National Brut), au programme ARIANE pour 64 %, aux autres programmes facultatifs selon des clés particulières. Au total, la participation française représente la plus grosse contribution (34 %).*

*.../...*

### 1.2.3. Sur le plan international

Outre l'A.S.E., le CNES entretient des *relations* avec des *organismes* internationaux suivants :

- l'O.N.U., Organisation des Nations Unies,
- l'U.I.T., Union Internationale des Télécommunications,
- l'O.M.M., Organisation Météorologique Modale.

Ces *relations* ont pu être épisodiques, ou prendre un *caractère plus permanent*. Dans ce dernier cas, les liens juridiques, prenant la forme d'une convention entre le CNES et l'*organisme* partenaire, ont été *établis*.

### 1.3. LES OBJECTIFS DU CNES

• Dans le domaine scientifique, de soutenir la *communauté* scientifique française dont des recherches exigent la mise en oeuvre des techniques spatiales et de mener une politique permettant à cette *communauté* de participer à des programmes *originaux* de recherche fondamentale.

• Dans le domaine des *applications*, de préparer des administrations à *utiliser* au mieux de leurs intérêts et des intérêts de l'*industrie* française des moyens puissants que représentent des techniques spatiales, ceci dans des domaines des *télécommunications* des services *aéronautiques* et maritimes, et de la *météorologie*.

De promouvoir l'*utilisation* et éventuellement organiser avec les *utilisateurs* potentiels, des domaines où des techniques spatiales conduisent à des *solutions nouvelles* : *localisation* des stations terriennes, *collecte* des données de petites stations automatiques, *téledétection* des ressources terrestres, recherche de *nouvelles* sources d'*énergie*, etc...

• D'*assurer* le développement et la mise au point de *nouvelles* technologies *indispensables* à la faisabilité des grands projets *spatiaux*.

.../...

## 1.4. LES INSTALLATIONS DU CNES

### 1.4.1. Son siège

Implanté à Paris, il regroupe en plus de la Présidence et de la Direction Générale, le Secrétariat Général et la Direction des Programmes et de la Politique Industrielle. Le Secrétariat Général est chargé essentiellement de trois missions concernant les domaines suivants :

- l'administration générale du CNES et la politique du personnel,
- les affaires économiques et financières,
- les relations extérieures.

La Direction des Programmes et de la Politique Industrielle est chargée pour sa part :

- d'élaborer les orientations à long et à moyen terme des programmes spatiaux français,
- d'orienter les programmes de recherche fondamentale et d'intérêt public utilisant les moyens spatiaux,
- de définir les programmes français vis-à-vis des organismes internationaux, en particulier en ce qui concerne l'A. S. E.,
- d'élaborer la politique industrielle du CNES en liaison avec les autorités de tutelle et des grandes administrations.

### 1.4.2. Le Centre Spatial de Toulouse (C.S.T.)

Le CST est le plus important centre technique du CNES. Il regroupe tous les moyens en personnel et en matériel nécessaires à la réalisation d'un programme spatial, à l'exception des activités relatives aux lanceurs qui sont localisées à Evry.

Cependant, le choix par le gouvernement français, d'une politique spatiale européenne a nécessité de définir le rôle du CST sur deux plans :

.../...

• Sur le plan national

Le CST apporte son soutien technique aux laboratoires scientifiques du CNRS et de l'Université engagés dans la recherche spatiale fondamentale. Il fait développer dans l'industrie française les technologies de pointes nécessaires à la construction des véhicules spatiaux. Il réalise les expériences spatiales faites en coopération bilatérale avec les Etats-Unis et l'U.R.S.S. ou d'autres pays et en assure le suivi et l'exploitation après la mise en orbite.

• Sur le plan européen

Les importants moyens d'essais dont il dispose permettent de tester les gros satellites européens et les futurs satellites lancés par ARIANE. Ainsi, les satellites européens OTS 1 et 2, MAROTS, METEOSAT 1 et 2 ont été dans le grand simulateur d'ambiance spatiale du CST, le plus grand d'Europe.

1.4.3. La Direction des Lanceurs (DLA)

Installée dans la ville nouvelle d'Evry, elle a, après avoir assuré la conception et le développement du lanceur français DIAMANT, la charge de conduire l'important projet du développement du lanceur ARIANE capable de porter des satellites géostationnaires pesant 400 à 500 kg, des satellites régionaux européens de télécommunication ou de télévision et des satellites européens intégrés à des systèmes mondiaux de météorologies, de navigation aérienne ou maritime, dont la maîtrise d'oeuvre a été confiée au CNES par l'A.S.E. et dont le premier lancement a eu lieu le 1er juin 1979.

1.4.4. Le Centre Spatial Guyanais (CSG)

Construit en 1964, le CSG a été choisi spécialement par le CNES parmi d'autres sites mondiaux comme centre de ses programmes de lancement à cause de sa latitude géographique quasiment équatoriale permettant aux lanceurs de profiter pleinement de l'effet de fronde dû à la rotation terrestre pour les lancements plein Est. Le CSG est installé près de Kourou, en Guyane Française, sur la côte Atlantique à 65 km de Cayenne. C'est la seule région du territoire relativement dégagée de la forêt. La zone de Kourou est un site particulièrement bien adapté aux activités spatiales. Elle permet des lancements en direction du Nord-Est,

*dans n'importe quel azimut entre - 12° et + 95° par rapport au Nord.*

*Cependant, le CNES ne s'attache pas seulement à l'étude et à la réalisation d'engins spatiaux. Il consacre aussi une grande partie de ses activités à des études plus spécifiques de recherche. C'est ainsi qu'il a pris en charge le Groupe d'Etudes des Phénomènes Aérospatiaux Non identifiés (GEPAN).*

LE GROUPE D'ETUDES  
DES PHENOMENES AEROSPATIAUX  
NON IDENTIFIES  
(GEPAN)

-----

2.1. POURQUOI LE GEPAN ?

*Il semble que de tout temps des phénomènes insolites aient été observés dans le ciel par les hommes. Mais, depuis la seconde guerre mondiale, des rapports relatifs à des objets volants non identifiés sont devenus de plus en plus nombreux. Pour cela, aux Etats-Unis, des recherches ont été faites par des Commissions travaillant à la demande de l'U.S. Air Force.*

*Sans parvenir à expliquer la totalité des rapports en leur possession, ces Commissions formulèrent toutefois des conclusions défavorables à des recherches ultérieures sur le phénomène O.V.N. I. Mais les rapports d'observation ne cessèrent pas cependant de s'accumuler. La persistance de ce phénomène conduisit à la création du GEPAN qui a pour but de résoudre ce problème.*

2.2. QU'EST-CE QUE LE GEPAN ?

*Le GEPAN a été créé le 1er mai 1977 au sein du CNES, sur le CST, à la suite d'une demande formulée par le public et par une prise en compte de l'administration du CNES. Actuellement, environ un dizaine de personnes sont employées à temps plein au GEPAN et une quarantaine de personnes dépendant de divers organismes du secteur public ou privé sont associées aux travaux du GEPAN.*

*Parallèlement, un Conseil Scientifique a été nommé, composé de scientifiques de très haut niveau dont le rôle est de superviser et de conseiller le GEPAN dans ses activités et ses orientations.*

.../...

*En amont du GEPAN, un rôle très important est joué par la Gendarmerie qui, en collaboration avec le GEPAN, établit un procès-verbal pour chaque observation qui leur est rapportée et adresse une copie de celui-ci au GEPAN.*

## 2.3. ETUDES DES PHENOMENES AEROSPATIAUX NON IDENTIFIES

### 2.3.1. Collecte d'informations

*La première information du GEPAN provient des personnes qui rapportent par témoignage qu'ils ont observé un phénomène curieux dans le ciel et qu'ils n'ont pas réussi à l'identifier.*

*En général, chaque observation est d'abord signalée à la Gendarmerie la plus proche du lieu d'observation qui, suivant l'importance des cas, prévient directement le GEPAN ou établit un rapport détaillé du témoignage qu'elle transmettra au GEPAN ultérieurement.*

### 2.3.2. Principe

*Le propos du scientifique (au GEPAN) est, à partir du témoignage, de déterminer si un stimulus<sup>‡</sup> est à l'origine de l'observation rapportée dans le témoignage. Si aucun stimulus n'est responsable, cela peut être :*

- soit une mauvaise interprétation,*
- soit une hallucination,*
- soit un caméléon.*

*Si un stimulus est responsable, il peut être :*

- connu par le témoin, mais non identifié,*

---

*‡ stimulus : cause externe ou interne capable de provoquer la réaction d'un organisme vivant (définition du Micro-Robert) ;*

- *inconnu par le témoin, donc non identifié, et dans cette deuxième catégorie :*

- *soit faisant partie de la connaissance scientifique,*
- *soit encore inconnu de la connaissance scientifique.*

*Il faut donc essayer au maximum d'identifier le stimulus comme faisant partie de ce qui est connu, mais aussi accepter le cas contraire.*

2ÈME P A R T I E

- La Magnétohydrodynamique -

## I - GENERALITES SUR LA M.H.D.

*La magnétohydrodynamique (M.H.D.) est une branche de la physique consacrée à l'étude des mouvements des fluides conducteurs de l'électricité en présence des champs magnétiques. Elle s'applique aux métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus), aux gaz faiblement ionisés et aux plasmas.*

*Lorsqu'un fluide conducteur se déplace dans un champ magnétique, il est le siège d'un champ électrique qui y produit des courants électriques, qui eux-mêmes modifient le champ magnétique initial ; d'autre part, Les forces de Laplace appliquées à la matière, le long des lignes de courant modifient le mouvement du fluide. Ainsi apparaît une interaction des effets électromagnétiques et hydrodynamiques, qui constitue le domaine d'étude de la M.H.D.*

*L'importance de l'interaction est caractérisée par un nombre sans dimension  $R_m$  représentant le nombre Reynolds magnétique ;  $R_m$  est proportionnel à la conductivité électrique du fluide, à sa vitesse et aux dimensions de l'écoulement. L'interaction est généralement faible dans les métaux liquides et les gaz faiblement ionisés et forte dans les plasmas.*

*Le champ magnétique peut être considéré comme un fluide mélangé au fluide matériel et exerçant sur lui des efforts de "pressions magnétiques", proportionnels au carré de l'induction magnétique  $B$ . Si l'interaction champ-matière est forte, ces deux fluides se déplacent solidairement : le champ magnétique est "gelé" dans la matière. Le milieu peut alors se propager des ondes spéciales de basse fréquence appelées ondes magnétohydrodynamiques.*

.../...

La M.H.D. intervient dans l'interprétation de nombreux phénomènes naturels : champs magnétiques, et vitesses de rotation des étoiles et des planètes ; tâches, éruptions et vents solaires ; structure de la magnétosphère ; origine des rayons cosmiques, rayonnement des pulsars. L'importance de la M.H.D. dans tous ces événements astrophysiques tient au fait que les dimensions, les vitesses et, souvent, les conductivités des plasmas en jeu, sont très élevées, de sorte que la matière et le champ magnétique sont fortement couplés.

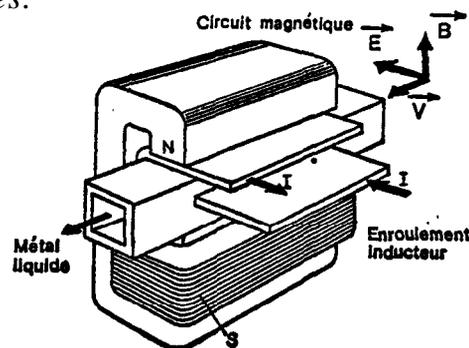


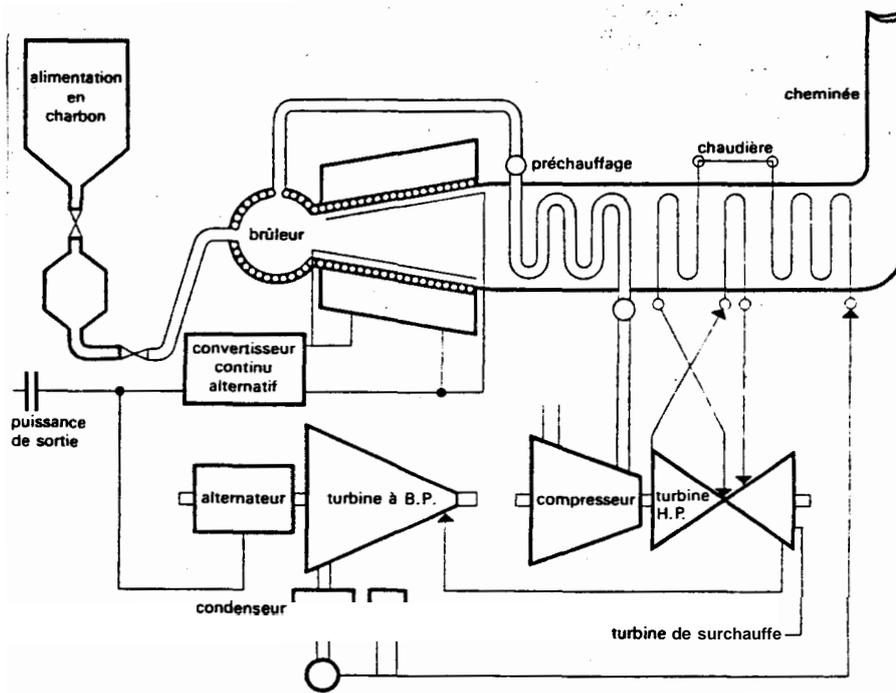
Fig. 4. — Pompe magnétohydrodynamique

La métal liquide est mis en mouvement sous l'effet des forces de Laplace. Ces forces sont dues à la composition d'un champ magnétique issu d'un électro-aimant et d'un champ électrique orthogonal avec le précédent existant entre deux électrodes placées le long de la tuyère accélératrice.

A l'échelle terrestre, de nombreuses applications techniques de la M.H.D. ont été envisagées, certaines dès le XIXe siècle.

Malheureusement, Les espoirs suscités par la M. H. D., pour application, dans Les années 60, à La conversion d'énergie fossile en énergie électrique, ont été déçus et ce, d'autant plus amèrement que les capitaux investis dans ces recherches n'ont pu déboucher sur des applications au bilan industriel franchement positif. Si bien, qu'actuellement, les seuls développements industriels importants concernent les métaux liquides (pompage électromagnétique du sodium utilisé comme réfrigérant dans certains réacteurs nucléaires ; pompage, broyage et lévitation dans certains traitements métallurgiques).

Les applications aux gaz ionisés et aux plasmas sont, en général, encore au stade de la recherche : confinement magnétique des plasmas dans les recherches sur la fusion contrôlée, conversion d'énergie (générateurs M. H. D. pour améliorer le rendement des centrales thermiques, moteurs M. B. D. pour la propulsion des fusées, souffleries hypersoniques).



Centrale thermique à charbon avec tuyère M.H.D. (d'après R. J. Rosa).

## II - LA M.H.D. ET LE GEPAN

*A la suite de ce rappel succinct des principes et applications de la M.B.D., on peut s'étonner de l'intérêt pour le GEPAN de s'attacher à une science qui, à priori, à peu de liens avec ces phénomènes fugitifs qui nous intriguent.*

*La méthodologie sur laquelle s'appuie le GEPAN est maintenant à même de développer une analyse et une recherche authentiquement scientifiques qui s'articulent autour de 3 grands axes :*

- *Enquêtes*
- *Traitements statistiques*
- *Recherches spécifiques.*

*C'est, bien sûr, le dernier point qui nous intéresse et que nous allons développer.*

### III - RAPPEL DES EQUATIONS DE LA M.H.D.

La M. H. D. est donc consacrée à l'étude des interactions entre le champ de vitesse  $\vec{v}$  et le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$ , qui décrivent le mouvement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique. Elle est donc régie par un système d'équations couplées obtenu à partir des équations de l'hydrodynamique.

#### a) Equations de Maxwell

On les écrit ici sous forme simplifiée.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \text{rot } \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{E} : \text{champ électrique} \\
 (2) \quad \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} & \vec{B} : \text{induction magnétique} \\
 (3) \quad \text{div } \vec{B} &= 0 & \vec{j} : \text{densité de courant}
 \end{aligned}$$

Les simplifications faites sont justifiées par le fait que, d'abord les liquides considérés ne sont pas magnétiques ; qu'ensuite, le courant de polarisation diélectrique et le courant de déplacement de Maxwell sont négligeables devant le courant de conduction  $\vec{j}$ . D'autre part, la Loi d'Ohm relative à un conducteur en mouvement nous donne :

$$(4) \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$\vec{v} \wedge \vec{B}$  est le champ d'induction qui s'ajoute au champ électrique produit dans le repère fixe.

En combinant ces équations (1), (2), (4), il vient :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} (\vec{v} \wedge \vec{B}) + \lambda \nabla^2 \vec{B}$$

avec  $\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$

il apparaît donc un terme de convection :  $\text{rot} (\vec{v} \wedge \vec{B})$   
 et un terme de diffusion :  $\lambda \nabla^2 \vec{B}$

.../...

En pratique, nous avons toujours plus ou moins superposition de ces deux termes. Et, par analogie avec la mécanique des fluides, on peut définir un critère caractérisant l'importance de ces 2 mécanismes, si l'on désigne une longueur caractéristique de l'écoulement. Le terme de convection est d'ordre  $vB/l$  et le terme de diffusion, d'ordre  $\lambda B/l^2$ , on peut donc former :

$$R_m = \frac{v l}{\lambda} \sim \frac{\text{Convection de } B}{\text{Diffusion de } B}$$

appelé nombre Reynolds magnétique.

### b) Equations de l'hydrodynamique

Nous nous plaçons en général dans le cas de fluides incompressibles ( $\rho = \text{cte}$ ) et homogènes ( $\eta = \text{cte}$ ).

L'équation de continuité

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0$  devient donc  $\text{div } \vec{v} = 0$  (1) et l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \vec{f} - \nabla p$$

donc, si on couple ces deux équations  $\vec{f}$  = force volumique, représente la force de Laplace  $I_f = \vec{f} \wedge \vec{B}$  d'où le système d'équations général :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{v} = 0 \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \wedge \vec{B} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \\ \vec{f} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{array} \right.$$

3ÈME P A R T I E

*Ecoulement autour d'un cylindre muni de deux électrodes  
diamétralement opposées  
et placé dans un champ magnétique constant*

---

ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE MUNI  
DE DEUX ÉLECTRODES DIAMÉTRALEMENT  
OPPOSÉES ET PLACÉ DANS UN CHAMP  
MAGNÉTIQUE CONSTANT

-----

AVANT PROPOS : *Pendant ce stage, qui se poursuivra en T.P.L.D., vu l'ampleur du sujet, nous nous sommes d'abord familiarisés avec la M.F.D., qui était, pour nous, un sujet nouveau, en vue d'étudier l'écoulement autour d'un cylindre muni de deux électrodes diamétralement opposées et placé dans un champ magnétique constant .*

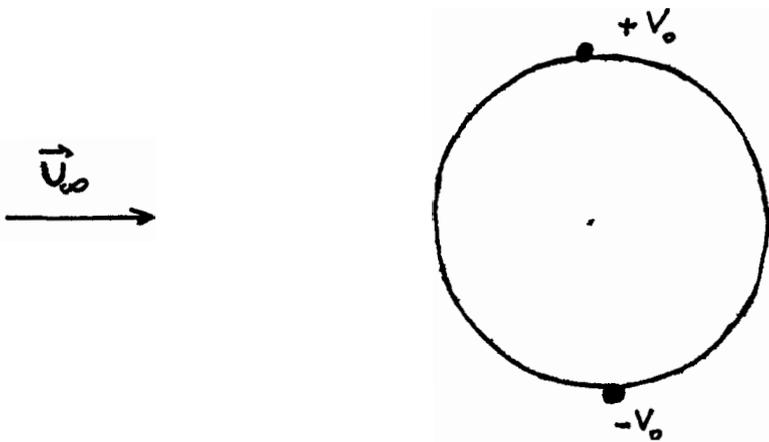
*Avant d'étudier ce problème avec une autre configuration (électrodes occupant un secteur angulaire au lieu d'être ponctuelles), plus délicate à manier au niveau des calculs, nous avons entrepris de mener à bien, si possible, la réalisation d'un programme de résolution du système d'équations couplées, commencé par notre prédécesseur (E. BERNARD, ingénieur Sup-Aéro) et qui, à son départ, n'avait pas donné de résultats probants. La partie théorique, menant au système d'équations, faisant déjà l'objet d'un rapport, nous ne ferons ici qu'un résumé des diverses étapes qui mène au programme lui-même.*

I - DEFINITION DE L'ÉCOULEMENT ET HYPOTHESES

*L'étude porte donc sur l'écoulement autour d'un cylindre supposé infini, muni de deux électrodes diamétralement opposées.*

*L'écoulement est stationnaire et bidimensionnel, le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse infinie ; il suffit de s'intéresser au plan orthogonal au cylindre. D'autre part, ce modèle étant un outil de base pour bien visualiser et comprendre ce qui se passe, nous ferons l'hypothèse de fluide parfait incompressible.*

.../...



## II - EQUATIONS GENERALES

### a) Problème hydrodynamique

Vu les hypothèses faites plus haut, les équations de continuité et quantités de mouvement se réduisent à :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = \vec{f} \end{cases}$$

La condition à la limite sur le cylindre étant  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

### b) Problème électromagnétique

Le fluide est supposé homogène isotrope. C'est un milieu sans polarisation, ni moment magnétique ; d'autre part, le fluide est neutre électriquement.

Les équations de Maxwell se réduisent donc à :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

d'où le système d'équations couplées.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \nabla p + \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \wedge \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{cases}$$

Pour faire apparaître les paramètres de similitude, on met ces équations sous forme adimensionnelle.

On pose :

$$\vec{B}^* = \frac{\vec{B}}{B_0} \quad \vec{E}^* = \frac{\vec{E}}{E_0} \quad \vec{U}^* = \frac{\vec{U}}{U_0} \quad P^* = \frac{P}{\rho U_0^2} \quad \vec{\nabla}^* = L_R \vec{\nabla}$$

$L_R$  et  $E_0$  grandeurs de références, et le système devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}^* = 0 \\ \cdot (\vec{U}^* \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{U}^* + \vec{\nabla}^* P^* = \mathbf{I} (\vec{E}^* + \epsilon \vec{\nabla}^* \wedge \vec{B}^*) \wedge \vec{B}^* \\ \cdot \vec{\nabla}^* \cdot \vec{E}^* = 0 \quad \vec{\nabla}^* \wedge \vec{E}^* = \vec{0} \\ \cdot \vec{\nabla}^* \wedge \vec{B}^* = \eta R_m (\vec{E}^* + \epsilon \vec{U}^* \wedge \vec{B}^*) \\ \cdot \vec{\nabla}^* \cdot \vec{B}^* = 0 \end{array} \right.$$

$\mathbf{I} = \frac{\sigma B_0 E_0 L_R}{\rho U_0^2} =$  paramètre d'interaction qui fera l'ordre de la force perturbatrice par rapport à la quantité de mouvement du fluide.

$R_m = \mu_0 \sigma U_0 L_R =$  nombre de Reynolds magnétique,

$$\epsilon = \frac{B_0 U_0}{E_0}$$

On arrive à un système d'équations aux dérivées partielles qu'il nous est impossible de résoudre dans sa généralité. Aussi allons-nous envisager une résolution approchée. Si l'on se place dans le cas où les paramètres  $\mathbf{I}$ ,  $R_m$ ,  $\epsilon$  sont "petits". On peut alors effectuer un développement asymptotique selon un paramètre pour pouvoir découpler leurs effets et rendre les équations plus simples et solubles.

## II - MISE EN EQUATIONS DU SYSTEME APPROCHE

### a) Généralités

Nous ne reprendrons pas ici la théorie générale sur les développements asymptotiques.

.../...

Les trois paramètres  $I, R_m, \epsilon$  étant indépendants (on le montre aisément) et introduisant des perturbations régulières, on peut mettre toute grandeur  $A$  sous la forme =

$$A = A_0 + [R_m A_1^A + I A_1^B + \epsilon A_1^C] + [R_m I A_1^{A2} + R_m \epsilon A_1^{A3} + I \epsilon A_1^{B2}] + \dots$$

et en les reportant dans les équations, et en identifiant tous les termes du même ordre, on obtient des équations découplées en  $I, R_m, \epsilon, I R_m, \dots$

Par exemple, à l'ordre zéro, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad \cdot \vec{\nabla}_\wedge \vec{B}_0 = \vec{0} \\ \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \cdot \vec{\nabla}_\wedge \vec{E}_0 = \vec{0} \\ \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 + \vec{\nabla} p_0 = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_0 = 0 \end{array} \right.$$

avec comme conditions aux limites  $\vec{U}_0 \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Gamma_f$  et  $\vec{U}_0 = 1$  sur  $\Gamma_\infty$

et donc à cet ordre les problèmes aérodynamiques et électromagnétiques sont totalement découplés.

• Pour le champ magnétique :  $\vec{B}_0$  est constant en tout point de l'espace.

• Pour le champ électrique : on calcule le champ créé en tout point de l'espace par deux conducteurs rectilignes parallèles, infinis et portés respectivement aux potentiels  $\pm V$  ; et nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_n = \frac{2R}{\log \frac{2R}{a}} \frac{2R \sin \theta (R^+ - R^-)}{(R^+ + R^-)^2 - 4R^+ R^- \sin^2 \theta} \\ E_\theta = \frac{2R}{\log \frac{2R}{a}} \frac{2R \cos \theta (R^+ + R^-)}{(R^+ + R^-)^2 - 4R^+ R^- \sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

• Champ de vitesse : on retrouve l'expression classique de l'écoulement d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre, soit sous forme complexe :

$$V^* = V_\infty \left( 1 - \frac{R^+}{z^+} \right)$$

.../...

ou encore :

$$\begin{cases} V_x^0 = 1 - R^2 \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ V_y^0 = - \frac{2R^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

Nous allons maintenant faire le calcul aux ordres supérieurs, en considérant, dans chaque cas, vu la catégorie d'écoulement à laquelle nous nous intéressons :

$E = 0$  (justifié par l'absence de singularité), ce qui revient dans les trois cas que nous allons traiter à négliger le champ magnétique induit par le courant  $\vec{J}$ , ainsi que le courant dû à  $\vec{J} \wedge \vec{B}$ .

Nous allons procéder par étapes successives pour le développement asymptotique.

1)  $* R_m = 0$

Cela revient simplement à faire un développement asymptotique en  $I$  sur les équations :

$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{J} + \vec{\nabla}_p = I \vec{E} \wedge \vec{B} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Donc toutes les grandeurs se décomposent suivant la puissance de  $I$  ; par exemple  $E = E_0 + E_1 I + E_2 I^2 + \dots$

après décomposition et identification terme à terme, nous avons :

o à l'ordre 0 : le même cas que celui traité précédemment.

o à l'ordre 1 :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = \vec{0} \quad \vec{E}_1 = \vec{0}$  sur  $\Gamma_c \Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{0}$  de même  $\vec{B}_1 = \vec{0}$   
donc  $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \quad \vec{B} = \vec{B}_0$  et on a donc à résoudre.

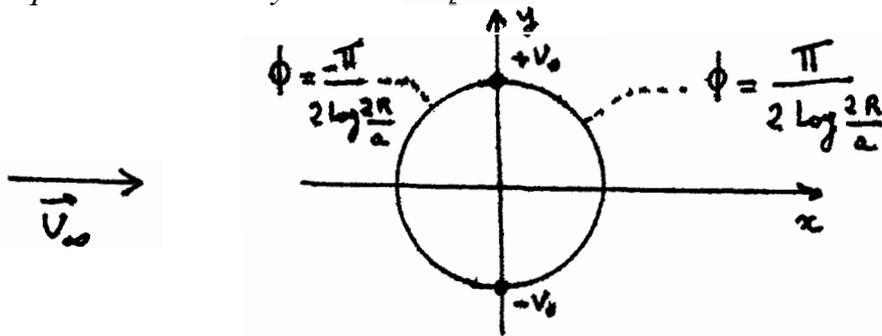
$$\left| \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{J} + \vec{\nabla}_p = I \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0 \end{array} \right.$$

On montre facilement que  $\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0$  dérive d'un potentiel de force  $\phi$  et il vient alors :

On voit donc que le champ de vitesse n'est pas modifié à cet ordre, par application d'un champ de Laplace, par contre la pression  $P$

devient  $P = p + \mathcal{I} \phi$

Le calcul du potentiel de force  $\phi$  montre que celui ci est constant sur chaque moitié de cylindre comprise entre 2 électrodes.



Et donc, la force de Laplace crée une dépression à l'avant ( $\phi < 0$ ) et une compression à l'arrière ( $\phi > 0$ ), d'où la mise en évidence d'une force propulsive (dirigée vers l'avant)  $F_{Lap}$

$$\vec{F}_L = -2 \int_{-\pi}^0 P \vec{n} ds = -2 \int_{-\pi}^0 \mathcal{I} \phi \vec{n} ds$$

d'où  $\vec{F}_L = - \frac{8 \sigma \sigma_\infty V}{\text{Log } 2R/a} R \vec{x}$  par unité de longueur de cylindre.

CONCLUSION : ce premier développement nous a permis de mettre en évidence la modification du champ de pression en présence de force de Laplace, ainsi que l'existence d'une force propulsive. Mais, en présence d'une force qui n'est pas irrotatoire, la vitesse sera, cette fois, perturbée.

2) - Développement en  $R_m$  avec  $I = 0$

Donc pour toute grandeur  $A$ , on a le développement :

$$A = A_0 + R_m A_1 + R_m^2 A_2 + \dots$$

et il vient donc

$$(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1 = \vec{0}$$

avec  $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Gamma_\infty$

et  $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\Gamma_p$

.../...

Ce qui donne :  $U_1 = 0$   $P_1 = 0$  de même pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$

$$U_i = 0 \text{ et } P_i = 0$$

o Pour le champ électrique, les équations de Maxwell sont inchangées et il vient alors :  $\forall i \in \mathbb{N}^* E_i = 0$  donc  $\vec{E} = \vec{E}_0$ .

o pour  $\vec{B}$  à l'ordre 1 nous avons

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1 = \vec{E}_0 \quad \text{et donc } \vec{B}_1 \text{ représente le champ induit par } \vec{E}_0.$$

Il donne après calculs :

$$\text{pour } \vec{B}_1 = - \frac{1}{\log \frac{2R}{a}} \left( \text{Arctg} \frac{r + \sin \theta}{\cos \theta} + \text{Arctg} \frac{r - \sin \theta}{\cos \theta} - E \pi \right) \vec{h}$$

$$\text{avec } E = +1 \text{ pour } \theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \\ E = -1 \text{ pour } \theta \in ]\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$$

pour  $i > 1$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_i = \vec{0} \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_i = 0 \Rightarrow \vec{B}_i = \vec{0} \text{ pour } i > 1.$$

donc la solution du développement en  $R_m$  est :

$$\begin{cases} \vec{U} = \vec{U}_0 \\ \vec{B} = \vec{B}_0 + R_m \vec{B}_1 \\ \vec{E} = \vec{E}_0 \end{cases} \quad P = P_0$$

CONCLUSION : Ce cas aura surtout été nécessaire pour avoir l'expression de  $\vec{E}$ . Pour avoir une modification de  $\vec{U}$ , il faut faire le développement mixte en  $I R_m$ .

3) - Développement en  $I R_m$

Toute grandeur  $A$  se met sous la forme :

$$A = A_0 + A_1^{01} I + A_1^{10} R_m + A_2^{11} I R_m + A_1^{01} I^2 + A_2^{10} R_m \dots \dots$$

.../...

Et donc à l'ordre  $I R_m$  il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1^{11} + (\vec{u}_1^{11} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_1^{10} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1^{01} + (\vec{u}_1^{01} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1^{10} + \vec{\nabla} p_1^{11} = \\ \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1^{11} = 0 \\ \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1^{11} = \vec{E}_1^{01} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1^{11} = 0 \\ \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1^{11} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1^{11} = 0 \end{array} \right. \quad \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0^{01} + \vec{E}_1^{01} \wedge \vec{B}_0$$

Nous avons vu précédemment que  $\vec{E}_1^{01} = 0$  et  $\vec{u}_1^{10} = 0$ . Il vient donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_1^{11} + (\vec{u}_1^{11} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + \vec{\nabla} p_1^{11} = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0^{01} \\ \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1^{11} = 0 \\ \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_1^{11} = \vec{0} \\ \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1^{11} = 0 \quad \text{avec les C.L.} \Rightarrow \vec{B}_1^{11} = \vec{0} \\ \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1^{11} = \vec{0} \\ \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1^{11} = 0 \quad \text{avec les C.L.} \Rightarrow \vec{E}_1^{11} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Donc, il reste un système aux dérivées partielles pour la vitesse et la pression de perturbation, le second membre de l'équation  $\vec{f} = \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_1^{(1)}$  étant connu.

On a donc à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot (\vec{U}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_1^{(1)} + (\vec{U}_1^{(1)} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_0 + \vec{\nabla} p_1^{(1)} = \vec{f} \\ \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_1^{(1)} = 0 \\ \cdot \vec{U}_1^{(1)} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_\infty \quad \vec{U}_1^{(1)} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_p \end{array} \right.$$

où  $\vec{U}_1^{(1)}$  et  $p_1^{(1)}$  sont les vitesses et pression de perturbation à déterminer et  $\vec{U}_0$  la vitesse non perturbée connue.

En adoptant les conventions d'Einstein, le problème se met sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot a_i u_{j,i} + u_i a_{j,i} + p_{,j} = f_j \\ \cdot u_{i,i} = 0 \\ \cdot \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_\infty \\ \cdot u_i n_i = 0 \text{ sur } \Gamma_p \end{array} \right.$$

Il peut se mettre encore sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot (a_i u_j + a_j u_i)_{,ij} + p_{,j} = f_j \quad j=1,2 \\ \cdot u_{i,i} = 0 \\ \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_\infty \\ u_i n_i = 0 \text{ sur } \Gamma_p \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La difficulté de résolution d'un tel système repose sur le fait que l'on n'en connaît pas la nature. L'idéal serait, par un changement de variable, de le mettre sous une forme elliptique plus classique à résoudre, mais toutes les tentatives, dans ce sens, n'ont pas abouties.

.../...

Nous allons, quand même, traiter ce problème par une méthode classique d'éléments finis. La formulation faible du problème variationnel donne donc : soit  $v \in [H^1(\Omega)]^2$  nous avons

$$\int_{\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} dx + \int_{\Omega} p_{,ij} v_{j,i} dx = \int_{\Omega} f_{j,i} v_{j,i} dx$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$\int_{\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} dx = - \int_{\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i,i} dx + \int_{\partial\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} n_i d\sigma$$

avec  $\partial\Omega = \Gamma_p \cup \Gamma_{\infty}$

d'où  $\int_{\partial\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} n_i d\sigma = \int_{\Gamma_p} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} n_i d\sigma + \int_{\Gamma_{\infty}} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} n_i d\sigma$

(1) (2)

comme  $(a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} n_i = a_{ij} n_i u_{j,i} v_j + a_{ji} v_j u_{i,j} n_i$

or  $a_{ij} n_i = 0$  sur  $\Gamma_p$  et  $u_{i,j} n_i = 0$  sur  $\Gamma_p$  donc (1) = 0

et  $\vec{n} = \vec{0}$  sur  $\Gamma_{\infty}$  donc (2) = 0

donc  $\int_{\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} dx = - \int_{\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i,i} dx$

La formulation faible du problème se ramène donc à trouver :

$$u \in H^1(\Omega)^2 \text{ et } p \in H^1(\Omega)$$

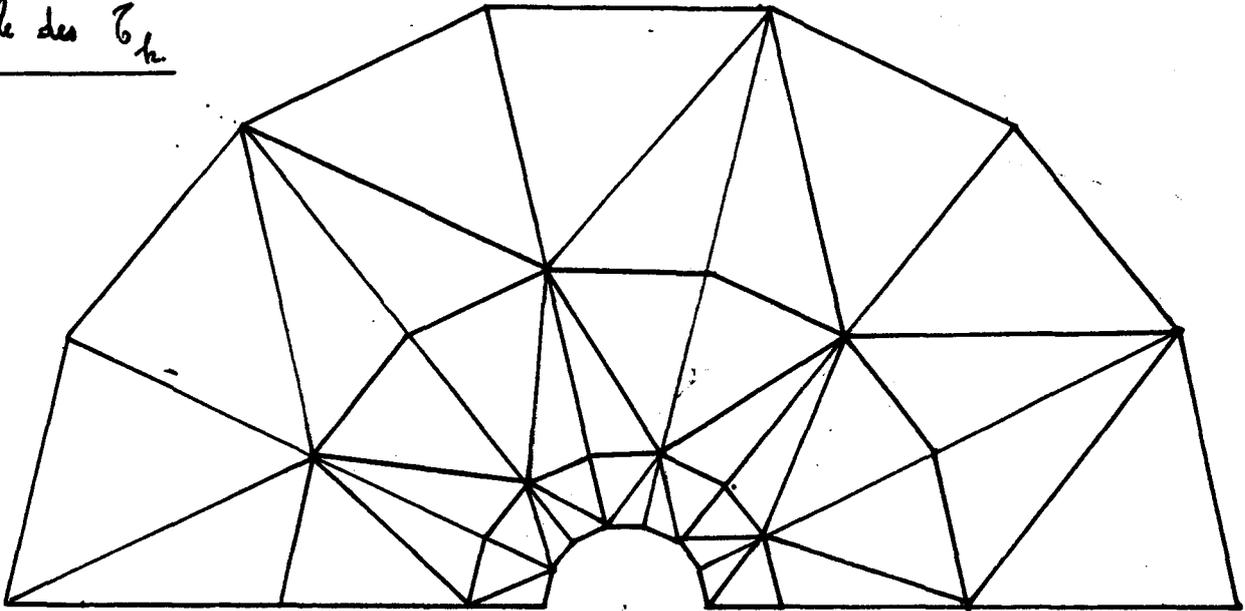
tels que  $\forall v \in [H^1(\Omega)]^2$

$$\int_{\Omega} (a_{ij} u_{j,i} + a_{ji} u_{i,j}) v_{j,i} dx + \int_{\Omega} p_{,ij} v_{j,i} dx = - \int_{\Omega} f_{j,i} v_{j,i} dx + \int_{\partial\Omega} p v_{j,i} n_j d\sigma$$

avec  $u_{j,i} = 0$  qui sera mise sous la forme  $\int_{\mathcal{T}_k} u_{i,i} dx = 0$

Pour résoudre ce problème, on utilise une méthode classique d'éléments finis sur le maillage demi-cylindrique (voir planche 1), en introduisant une famille de triangles  $\mathcal{T}_k$ , la pression  $p$  et la force  $f$  étant prises constantes sur chaque triangle.

famille des  $\mathcal{C}_h$



On ne développera pas ici les étapes qui nous ont permis d'arriver au système linéaire final.

$2 \times NP$	$NE$				
A	B		U	=	F
C	O		P		O

NP = nombre de noeud  
mi = nombre de triangles

A, B, C étant des matrices-bandes, la matrice C exprimant le fait que

$$\forall K \quad 1 \leq K \leq NE \quad \int_{\mathcal{C}_K} m_{i,j} dx = 0$$

RESULTATS : Après maintes modifications du programme, nous sommes enfin arrivés à un résultat physiquement acceptable (sauf sur  $\Gamma_{\infty}$ ), c'est-à-dire qu'il y a une orientation d'ensemble de la vitesse de perturbation (voir planche 2), et que les conditions de tangence sur le cylindre sont assez bien respectées.

Toutefois, abordé sous l'aspect purement mathématique, ce résultat n'est pas totalement satisfaisant, car pour y aboutir, nous avons dû fixer explicitement la vitesse en certains points de la frontière (soit  $\vec{v} = \vec{0}$  en chacun des points d'arrêt, ainsi que  $\vec{v} \cdot \vec{j} = \vec{0}$  sur l'axe de symétrie), alors que la formulation faible aurait dû suffire pour arriver à ce résultat, ce qui n'a malheureusement pas été le cas. Aussi avons-nous mis en oeuvre un programme test, afin de vérifier l'exactitude du programme de calcul et de la formulation. Mais le temps nécessaire à la mise en place de celui-ci n'a pas encore permis d'obtenir des résultats probants.

.../...

*Mais, en attendant d'aboutir à des résultats plus rigoureux, nous pouvons déjà, avec ceux obtenus, avoir une vue d'ensemble du phénomène physique. On constate en effet que le fluide est freiné par la présence du champ de force magnétique induit et que celui-ci a tendance à l'écartier du cylindre en amont, et au contraire à le "pousser" vers le cylindre en aval. Aussi, la direction de vitesse de perturbation laisse peut être envisager la présence d'un point singulier. Aussi espérons-nous, s'il y a lieu, pouvoir le mettre en évidence en prenant un maillage plus fin.*

4ÈME P A R T I E

*Résolution dans Le cas dea électrodes  
occupant un secteur*

RESOLUTION DANS LE CAS  
DES ELECTRODES OCCUPANT  
UN SECTEUR

-----

*Le couplage des équations aérodynamiques et électromagnétiques conduit à un système d'équations aux dérivées partielles. La complexité de ces équations magnétohydrodynamiques impose des simplifications à la fois sur la géométrie du dispositif expérimental et sur la nature du fluide.*

*L'étude portera sur l'écoulement autour d'un cylindre portant deux électrodes longitudinales occupant deux secteurs diamétralement opposés*

*L'écoulement est bidimensionnel, le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse infinie : il suffit de s'intéresser au plan orthogonal au cylindre.*

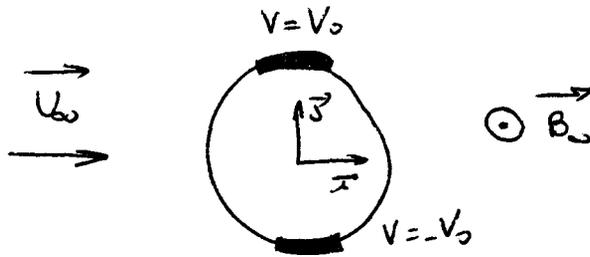
*Cette géométrie particulière (diverses symétries) permet de simplifier les équations tout en apportant un progrès par rapport aux électrodes infiniment longues et ponctuelles, ce qui constituait 1 approximation supplémentaire.*

*Notre but étant de mettre au point un outil de base prouvant l'existence d'un certain nombre de phénomènes et d'en prévoir l'ordre de grandeur, il nous a semblé raisonnable de faire une approximation importante mais classique dans ce type d'approche : l'hypothèse "fluide parfait".*

I - RESOLUTION APPROCHEE

a) Potentiel électrique

*En nous inspirant des résultats obtenus dans le cas des électrodes infiniment longues, diamétralement opposées et ponctuelles, nous allons chercher l'expression du potentiel électrique dans le plan  $(0, i, j) =$*



Appelons  $\Gamma$  la frontière constituée par la circonférence du cylindre,  $\Gamma_\infty$  la "frontière infinie",  $\Omega$  le domaine compris entre  $\Gamma$  et  $\Gamma_\infty$

o Equations

Pas de densité de charge donc l'équation de Laplace se réduit à  $\Delta V = 0$  (équation de Poisson).

o Conditions aux limites

sur  $\Gamma_\infty$   $V = 0$

$$\text{sur } \Gamma \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \quad \begin{cases} \Gamma_1 : V = V_0 \\ \Gamma_2 : V = -V_0 \\ \Gamma_3 : \Gamma - (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \end{cases}$$

$\Gamma_3$  est la frontière isolant/milieu conducteur donc le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est tangent à  $\Gamma_3$ .

$\vec{j} = \epsilon (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , en négligeant le champ d'induction devant le champ électrique  $\vec{j} = \epsilon \vec{E}$

Le champ électrique est donc tangent à  $\Gamma_3$ , lignes de champ et équipotentielles formant un réseau orthogonal ; la condition à la limite sur  $\Gamma_3$  est donc  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$

Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{dans } \Omega & (1) \\ V = V_0 & \text{sur } \Gamma_1 & (2) \\ V = -V_0 & \text{sur } \Gamma_2 & (3) \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 & (4) \end{cases}$$

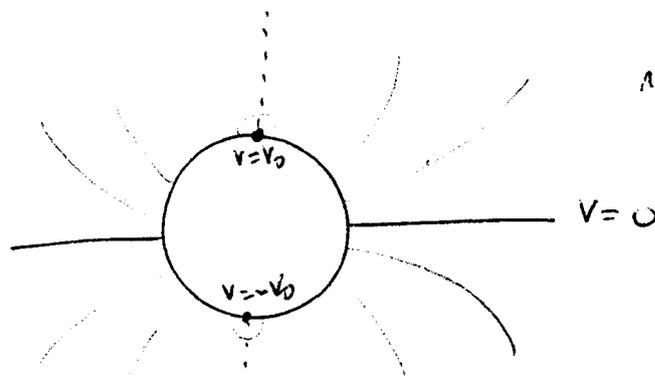
Il faut trouver une solution du Laplacien vérifiant des conditions aux limites mixtes (condition de Dirichlet sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , de Neumann sur  $\Gamma_3$ ) transformations conformes, changements de variables et autres méthodes s'avérant inefficaces.

Une approximation au niveau des conditions aux limites s'est avérée indispensable :

Replacer la condition de Neumann (4) par une condition de Dirichlet (4)!

Le potentiel électrique créé par deux électrodes infiniment longues, de potentiels opposés, séparées de  $2R$  est donné par

$$V(r, \theta) = \frac{V_0}{2 \log \frac{2R}{a}} \log \left\{ \frac{r^2 + R^2 + 2Rr \sin \theta}{r^2 + R^2 - 2Rr \sin \theta} \right\}$$



rayon des électrodes  $a \ll R$

Sur  $\rho_3$ ,  $r = R$

$$V(R, \theta) = \frac{V_0}{2 \log \frac{2R}{a}} \log \left\{ \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right\}$$

Nous allons utiliser cette formule pour obtenir une expression approchée du potentiel sur  $\rho_3$ .

se réduit aux intervalles  $\left[ \frac{3\pi}{2} + \varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi, \frac{3\pi}{2} - \varphi \right]$

et non aux intervalles  $\left] \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

Une similitude angulaire (a) est donc indispensable et nous retiendrons l'expression :

$$V(R, \vartheta) = \frac{V_0}{2 \log \frac{2R}{a}} \log \left\{ \frac{1 + \sin \left[ \vartheta \frac{(\pi/2 - \varphi)}{\pi/2} \right]}{1 - \sin \left[ \vartheta \frac{(\pi/2 - \varphi)}{\pi/2} \right]} \right\}$$

pour  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$   $V = V_0$  (b)

ce qui impose pour a la valeur suivante :

$$a = \frac{2}{\sqrt{\left(1 + \sin \frac{(\pi/2 - \varphi)}{\pi/2}\right)^2 / \left(1 - \sin \frac{(\pi/2 - \varphi)}{\pi/2}\right)^2}}$$

Nous sommes donc amenés à résoudre le problème plus classique suivant :

$$\begin{cases} \Delta V = 0 & \text{dans } \Omega \\ V = V_0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ V = -V_0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ V = V(R, \vartheta) & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases}$$

la restriction (b) implique la continuité de la fonction V sur  $\Gamma_1$ .

On cherche tout d'abord les fonctions de la forme  $X(r) Y(\vartheta)$  vérifiant  $\begin{cases} \Delta V = 0 \\ Y(0) = Y(2\pi) \end{cases}$

On trouve une infinité de fonctions Y, formant une base de  $L^2(0, 2\pi)$

$$Y_m = a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta \quad m \in \mathbb{N}$$

.../...

Il reste  $\lambda^2 \ddot{X} + \lambda \dot{X} - m^2 X = 0$

équation d'Euler qui a comme solution  $\lambda^{\pm m}$ . On veut que la solution reste finie à l'infini.

Finalement, on cherche  $V$  sous la forme :

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{-m} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer les coefficients.

On trouve :

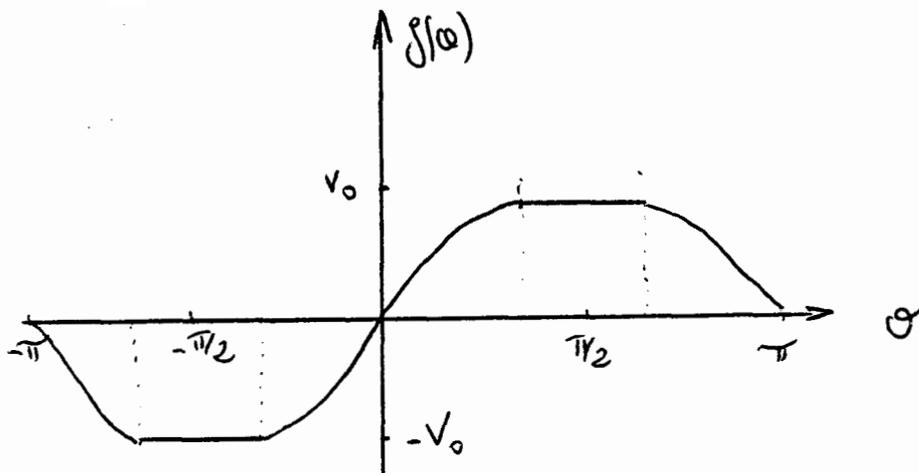
$$a_m = \frac{R^m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta$$

$$b_m = \frac{R^m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

avec  $f(\theta)$  définie comme suit :

$$f(\theta) = \begin{cases} V_0 & \text{si } \theta \in \left[ \frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi \right] \\ -V_0 & \left[ \frac{3\pi}{2} - \varphi, \frac{3\pi}{2} + \varphi \right] \\ \frac{V_0}{2 \log \frac{2R}{a}} \log \left\{ \frac{1 + \sin \left( \theta \frac{(\pi/2 - \varphi)}{\pi/2} \right)}{1 - \sin \left( \theta \frac{(\pi/2 - \varphi)}{\pi/2} \right)} \right\} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

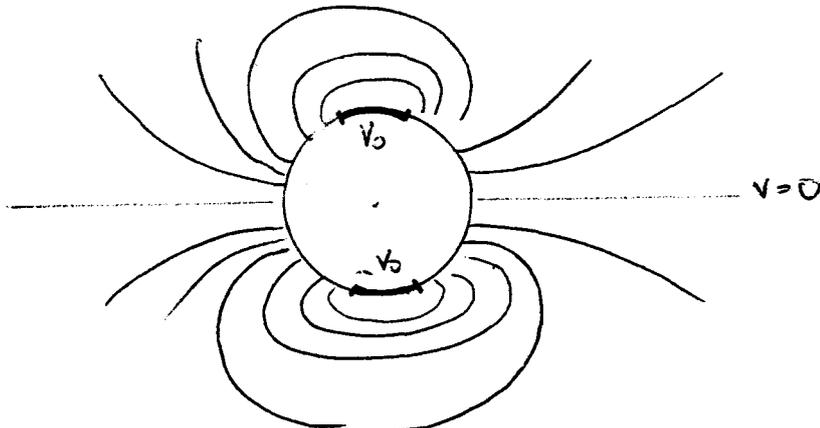


.../...

La fonction  $f(\theta)$  étant impaire, les fonctions  $\cos n\theta$  paires, les termes  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont nuls.

donc : 
$$V(r, \theta) = \sum_3^{\infty} r^{-n} b_n \sin n\theta$$

A priori, nous connaissons l'allure des équipotentielles :



ce qui permet d'écrire :  $V(r, \theta) = V(r, \pi - \theta)$

soit :  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, 2\pi], \forall r \in ]R, +\infty[$

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} r^{-m} b_m \sin m\theta &= \sum_0^{\infty} r^{-m} b_m \sin(m\pi - n\theta) \\ &= \sum_0^{\infty} r^{-m} b_m (-1)^{m-1} \sin n\theta \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$b_m = b_m (-1)^{m-1}$$

$$b_{2p} = b_{2p} (-1)^{2p-1} = -b_{2p}$$

$$b_{2p+1} = b_{2p+1} (-1)^{2p} = b_{2p+1}$$

d'où :

$$\forall m \in \mathbb{N}, b_{2m} = 0$$

Finalement  $V(r, \theta)$  est de la forme :

$$V(r, \theta) = \sum_0^{\infty} r^{-(2n+1)} b_{2n+1} \sin[(2n+1)\theta] \quad (\text{E})$$

.../...

Nous avons mis au point un programme calculant les coefficients de la série et permettant le tracé des équipotentiels : les résultats sont tout à fait en accord avec les prévisions.

### b) Potentiel de force

Nous déduisons facilement de (I) l'expression du champ électrique dans (J) :

$$\vec{E} = -\text{grad} V \quad \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} E_r = \sum_0^\infty b_{2m+1} (2m+1) r^{-(2m+2)} \sin [(2m+1)\theta] \\ E_\theta = -\sum_0^\infty b_{2m+1} r^{-(2m+2)} \cos [(2m+1)\theta] (2m+1) \end{cases}$$

en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} E_x = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta \\ E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta \end{cases}$$

d'où l'expression de la force de Laplace :

$$\frac{1}{\epsilon} \vec{f} = \vec{E} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} B E_r \sin \theta + B E_\theta \cos \theta \\ -B E_r \cos \theta + B E_\theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

ou

$$\frac{1}{\epsilon} \vec{f} = \begin{pmatrix} E_\theta B \\ -E_r B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} B \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ B \frac{\partial V}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}_{(r, \theta, z)}$$

$\vec{f}$  dérive d'un potentiel  $\varphi$  défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = f_r = -\frac{\epsilon}{r} B \frac{\partial V}{\partial \theta} & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = f_\theta = \epsilon B \frac{\partial V}{\partial r} & (2) \end{cases}$$

$$(1) : \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} B \epsilon \sum_0^\infty r^{-(2m+1)} b_{2m+1} \cos [(2m+1)\theta] (2m+1) \dots$$

Intégrons (1) /  $r$

$$\varphi(r, \theta) = -B \epsilon \sum_3^{\infty} (b_{2m+1} r^{-(2m+1)} \cos(2m+1)\theta) + g(\theta)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = +B \epsilon \sum (b_{2m+1} (2m+1) r^{-(2m+1)} \sin(2m+1)\theta) + g'(\theta)$$

(2) implique alors  $0$  soit  $g(\theta) = C_0$

d'où l'expression du potentiel de force

$$\varphi(r, \theta) = -B \epsilon \sum_0^{\infty} b_{2m+1} r^{-(2m+1)} \cos(2m+1)\theta$$

On constate que le réseau des équipotentiels ( $\Psi$ ) est orthogonal au réseau des équipotentiels électriques ( $V$ ).

Nous avons vu qu'en présence des forces de Laplace, la pression devient  $P' = P_0 + \mathcal{I} \varphi$

Pour connaître la pression d'arrêt, il suffit donc de calculer

$$\varphi(r=R, \theta=0 \text{ ou } \pi)$$

## II - SOLUTION PAR METHODE VARIATIONNELLE

Si la méthode approchée, précédemment étudiée, a permis de mettre en évidence certaines particularités des effets magnétohydrodynamiques et leurs ordres de grandeur, un seul regret persiste : n'avoir pu résoudre le problème avec des conditions aux limites mixtes.

Une seule solution s'offre à nous pour palier à cet inconvénient : l'utilisation d'une méthode variationnelle. La mise en oeuvre d'un programme par éléments finis ayant occupé une trop large part du stage, nous avons préféré utiliser directement un système logiciel de calcul généralisé par éléments finis.

.../...

GEFIT est un système logiciel général de résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques dans  $\mathbb{R}^2$ , par la méthode des éléments finis.

C'est-à-dire que le logiciel GEFIT résoud les problèmes du type :

trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

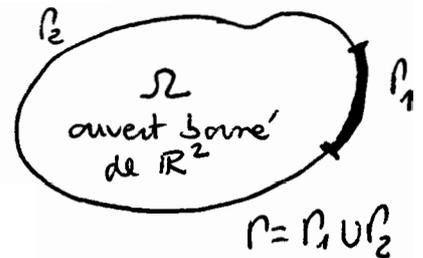
$$Au = f_0 \text{ dans } \Omega$$

$$(u - u_0)|_{\Gamma_2} = 0$$

$$(b_0(x)u + \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Gamma_1} = f_1$$

avec l'opérateur A défini par

$$A = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^2 a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x)$$



Le système GEFIT est organisé sous forme de bibliothèques de programmes, chaque bibliothèque étant associée à une étape fonctionnelle de la méthode des éléments finis.

Le traitement d'un problème donné à l'aide du système GEFIT pose comme principe l'obligation par l'utilisateur :

- de définir une stratégie de résolution dont le choix est, en réalité, imposé par la dimension du problème traité : taille de la matrice du système linéaire résultant de l'application de la méthode des éléments finis.
- de définir les paramètres spécifiques à l'application traitée : opérateur A, conditions aux limites, nature de l'ouvert  $\Omega$ .
- de définir et de gérer l'appel des différentes bibliothèques ainsi que leurs interfaces.

Exemple d'utilisation de ce programme : Pression d'arrêt

On peut définir un potentiel de force  $\varphi$  /  $\vec{f} = \text{grad} \varphi$   
si nous intégrons cette égalité sur la demi-droite définie par le point d'arrêt et l'axe  $\vec{x}$ .

$$\int_{\vec{x}}^{\infty} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}}^{\infty} \text{grad} \varphi \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}}^{\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{y} \right) d\vec{x}$$

soit 
$$\int_{\vec{x}}^{\infty} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \varphi(\infty) - \varphi(x)$$

à l'infini les perturbations sont supposées nulles  $\varphi(\infty) = 0$  (support base)  
donc pression d'arrêt :

$$\varphi_0 = - \int_{\vec{x}}^{\infty} \vec{f} \cdot d\vec{x}$$

or  $\vec{f} = \epsilon (\vec{E} \wedge \vec{B})$  avec  $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

d'où 
$$\varphi_0 = - \int_{\vec{x}}^{\infty} \epsilon B E_y dx$$

Il suffit donc de calculer le potentiel électrique  $V$ , d'en déduire le champ électrique et par intégration, nous obtenons la pression d'arrêt.

CONCLUSION & OBJECTIFS

## CONCLUSION & OBJECTIFS

-----

*Nous avons donc, au cours de ce stage, obtenu en ce qui concerne le champ de vitesse de perturbation, des résultats physiquement acceptables, et mis en place tout un édifice de calculs du potentiel électrique et du potentiel de forces sur un modèle différent (électrodes occupant un secteur angulaire).*

*Aussi, nous espérons, en vue du projet de fin d'études, aboutir dans la première partie à des résultats plus rigoureux sur le plan Mathématiques. En qui nous permettrait ensuite de nous servir de cet outil sur le modèle électrodes secteurs pour étudier les divers aspects mécaniques des fluides du problème (vitesse de perturbation, pression d'arrêt, force propulsive, etc...), et mettre en évidence l'existence d'une éventuelle singularité dans l'écoulement.*

ANNEXES

BLANCHE-n°-1 :

Champ de vitesse non perturbée

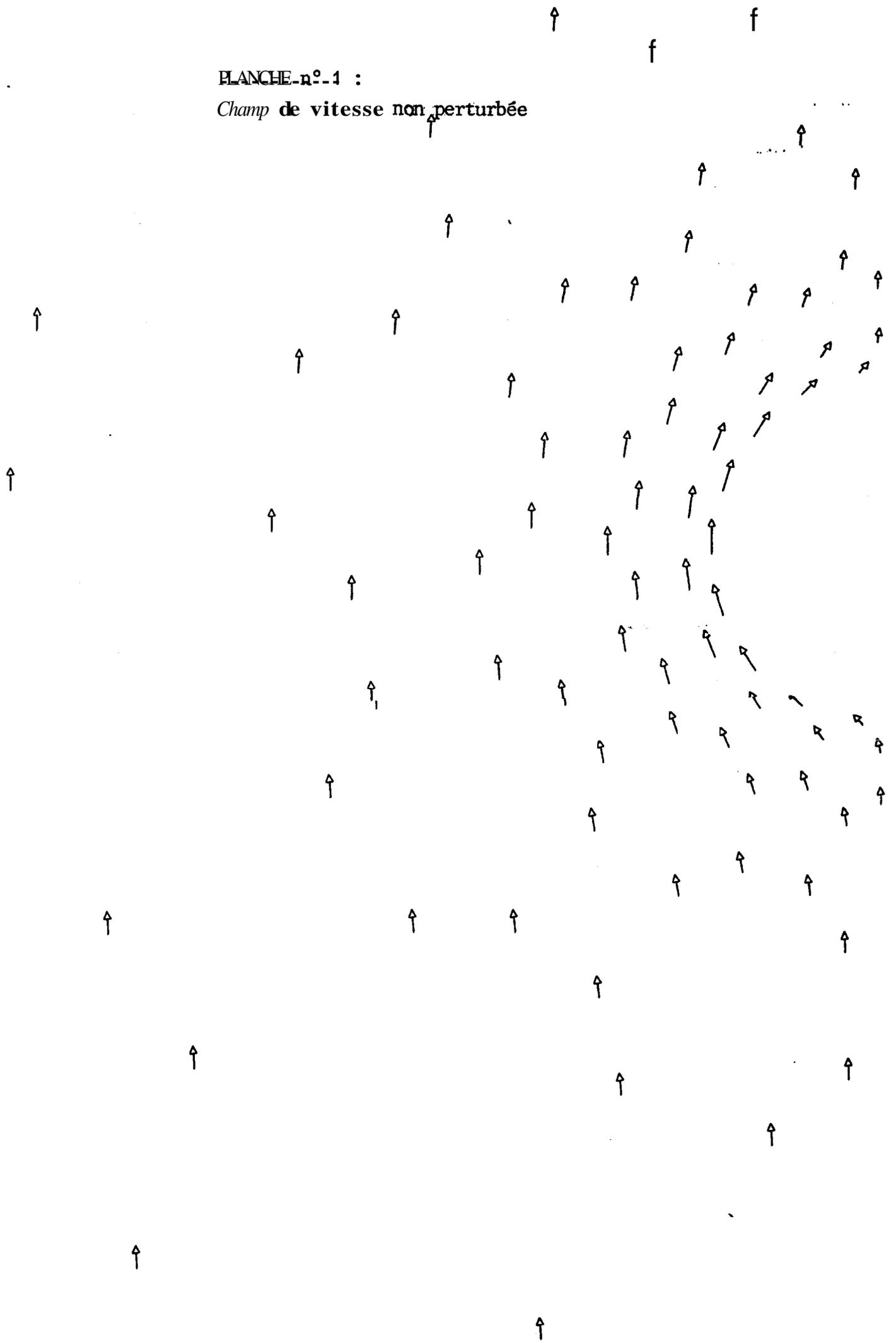


PLANCHE n°-2 :

Champ de forces induites

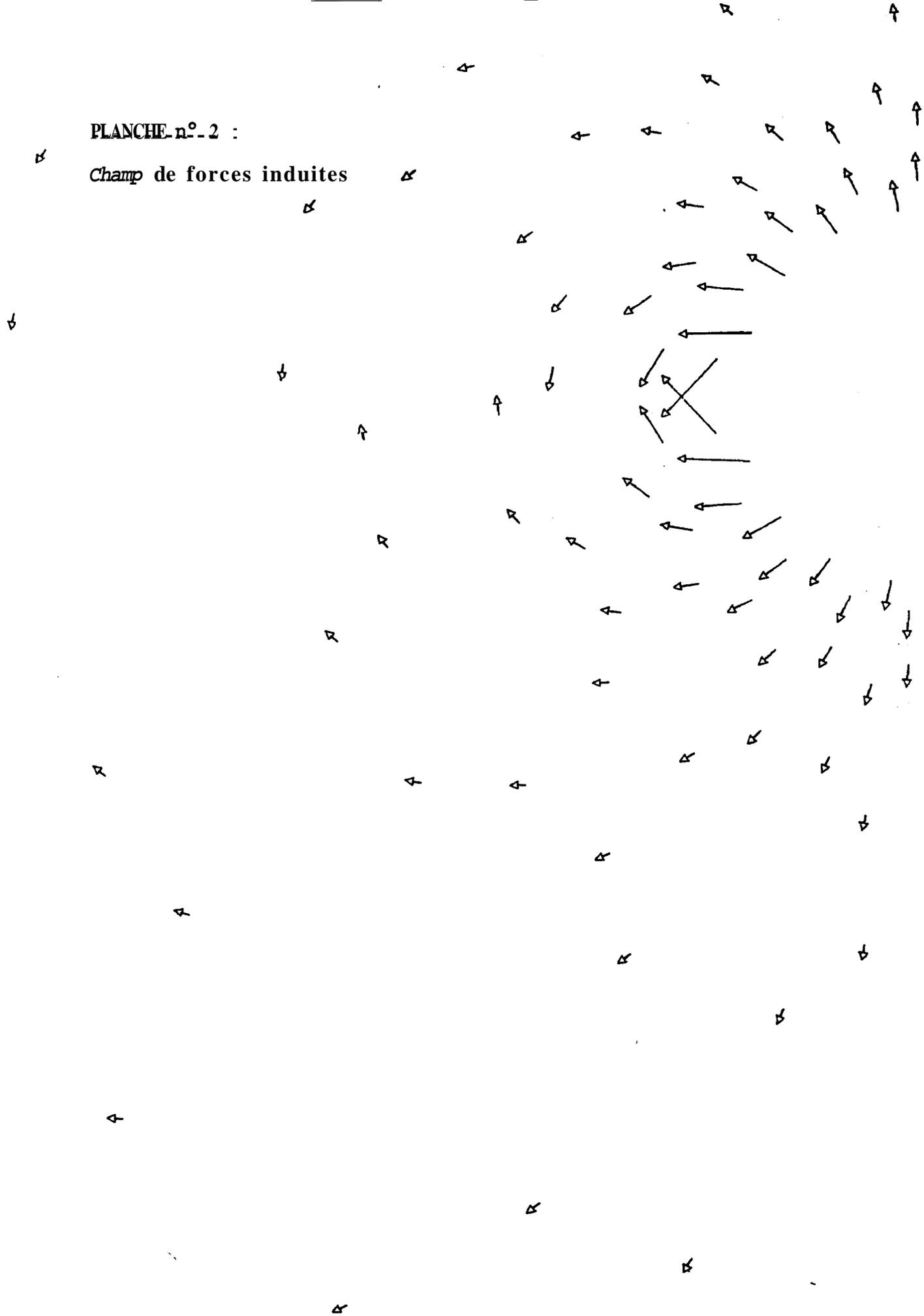
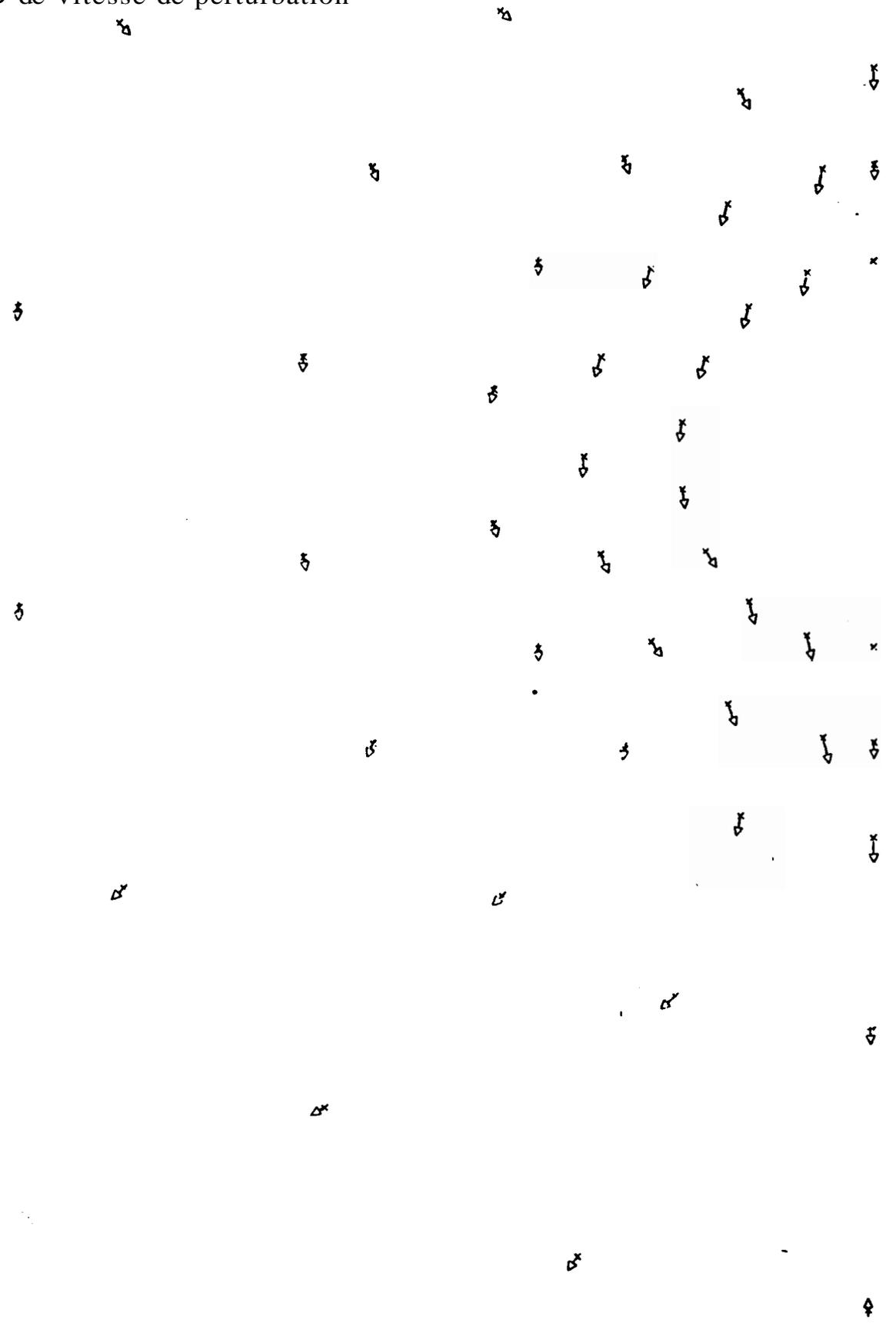


PLANCHE n° 3 :

*Champ* de vitesse de perturbation



100=BOUCL, T400, CM60000.

110=ACCOUNT, STAGE, DCTGE, PETUDE, C146.

120=FTN, PMD.

130=ATTACH, GR, GRAPHBEN, ID=BIBLI.

140=ATTACH, BIB, BENSONBIB, ID=BIBLI.

150=ATTACH, OLP, HARWELL, ID=BIBLI.

160=LIBRARY, GR, BIB.

170=LIBSET(LIB=OLP).

180=LGO.

190=\*\*EOR

200=C

210=C

\*\*\*\*\*

\* TRACE DES EQUIPOTENTIELLES ELECTRIQUES \*

\*\*\*\*\*

220=C

230=C

240=C

250=

PROGRAM BOUC(INPUT, OUTPUT, TAPE1=INPUT, TAPE2=OUTPUT)

260=

EXTERNAL FONC

270=C

280=C

DONNEES GEOMETRIQUES, ECHELLES...

290=C

300=

DIMENSION TAB(46, 6), B(101)

310=

COMMON B

320=

DATA IC, IL, ALG, AHT, HMIN, HMAX, DH, CAR, IT, JT, PI/100, 100, 50,

330=

50, -5, 100, 5, 2, 46, 6, 3, 1416/

340=C

350=C

CALCUL DES COEFFICIENTS DE LR SERIE

360=C

370=

DO 1 I=1, 101

380=

U=PI\*\*I

390=

CALL DDM1A(0.01, 10, U, 2, 1.5708, 1, SINT, CINT)

400=

PC(I)=4.\*SINT/PI

410=

WRITE(2, 1) U, B(I)

420=

FORMAT(5, ' b; I-3A)

430=

CONTINUE

440=C

450=C

TRACE DES EQUIPOTENTIELLES

460=C

470=

CALL DPLMAN(5L(GERAN), 3L146, 2LPO, 16L(EQUIPOTENTIELLES,

480=

2LAV, 2LBR, 2LAB, 1LN)

490=

CALL IGENA(ID, ID, ID)

500=

CALL PNUMA(0., 5., 0, 0., 0.)

510=

CALL BOUCLA(FONC, IC, IL, ALG, AHT, HMIN, HMAX, DH, CAR, IT, JT, TAB)

520=

CALL PNUMA(0., 0., 9999, 0., 0.)

530=

STOP

540=

END

550=C

560=C

DIFFERENTES FONCTIONS UTILISEES

570=C

580=

FUNCTION F(X)

590=

DATA V, R, FI, PI/100., 0.01, 0.523, 3.1416/

600=

S=PI\*R

610=

AG=PI/2.-FI

620=

IF(X.GT.AG) GO TO 4

630=

F=V/(2.\*ALOG(2.\*R/S))\*ALOG((1.+SIN(2.\*X\*(PI/2.-FI)/PI))/

640=

1(1.-SIN(2.\*X\*(PI/2.-FI)/PI)))

650=

GO TO 2)

660=

4 F=V

670=

2 CONTINUE

680=

RETURN

690=

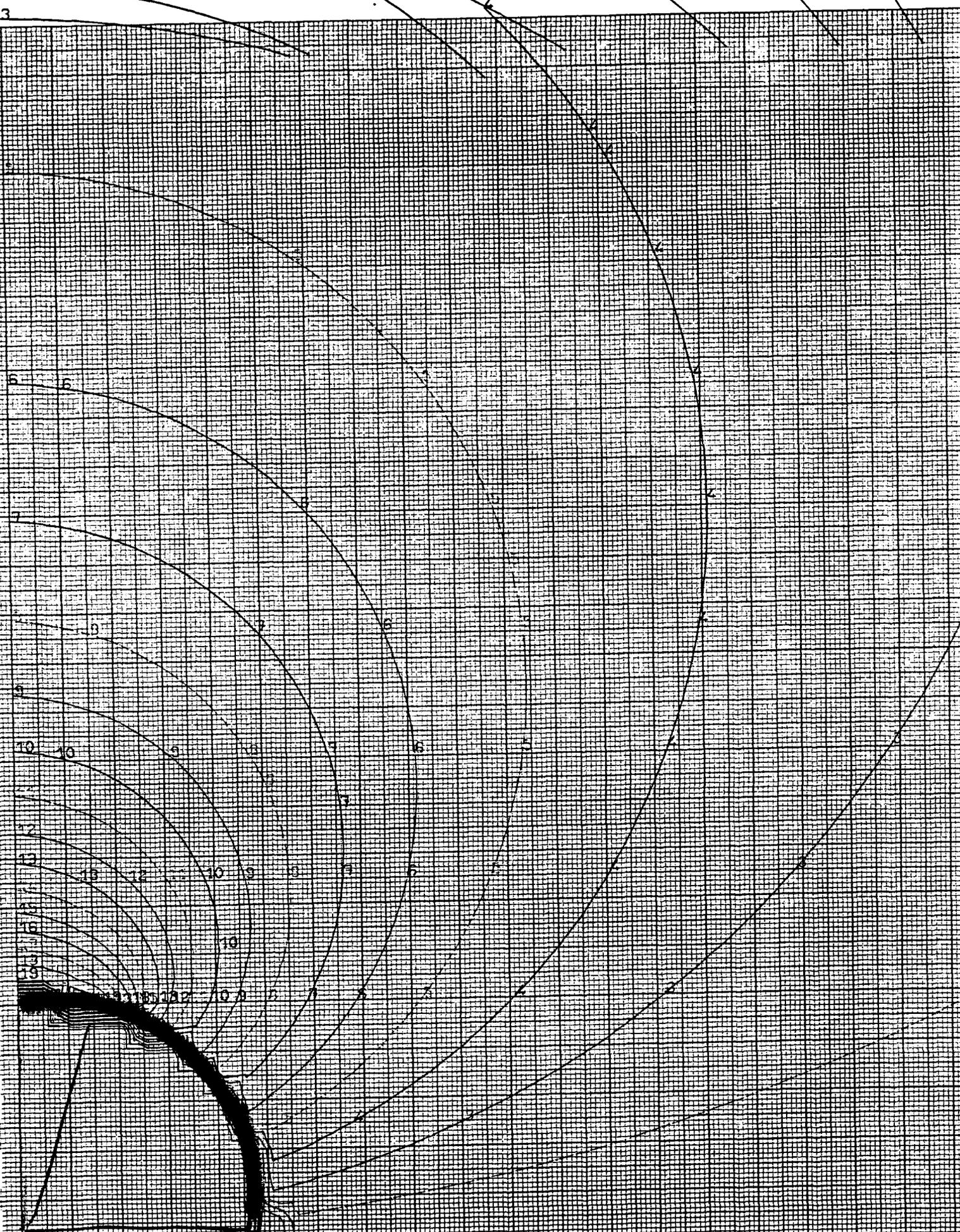
END

700=C

```

710= FUNCTION FOND(C1, J)
720= COMMON /R(101)
730= DATA R, P1/.01, Z.1416/
740= J=J-1
750= D=FLOAT((C1-1)*(C1-1))/100. +FLOAT(J*J)/100.
760= IF(D, LE. 1.01) GO TO 1
770= E=(J-1)*(C1-1)+J*J
780= PR=SQRT(E)*R/10.
790= Q=FLOAT(J)/FLOAT(C1)
800= TETA=ATAN(Q)
810= FOND=0.
820= DO 2 K=1, 101
830= FOND=FOND+(R/PR)**(2*K-1)*H(K)*SIN((2*K-1)*TETA)
840= 2 CONTINUE
850= RETURN
860= 1 FOND=-.1.
870= RETURN
880= END

```



EQUIPOTENTIELLES V

```

100=POUCL, T500, CMS0000.
110=ACCOUNT, STAGE, DCTGE, PETUDE, C146.
120=FTN, PME.
130=ATTACH, GR, GRAPHBEN, ID=BIBLI.
140=ATTACH, BIB, BENSONBIB, ID=BIBLI.
150=ATTACH, OLP, HARWELL, ID=BIBLI.
160=LIBRARY, GR, BIB.
170=LDSET(LIB=OLP).
180=LGO.
190=*EOR

```

```

191=C *****
193=C * TRACE DES EQUIPOTENTIELLES DE FORCES *
194=C * *****
195=C
196=C

```

```

200= PROGRAM BOUC(INPUT, OUTPUT, TAPE1=INPUT, TAPE2=OUTPUT)
210= EXTERNAL FONC
220= DIMENSION TAB(46, 6), B(101)
230= COMMON B

```

```

231=C
232=C DONNEES GEOMETRIQUES, ECHELLES...
233=C

```

```

240= DATA IC, IL, ALG, AHT, HMIN, HMAX, DH, DAR, IT, JT, PI/100, 103, 50.
250= 1, 50., -1.5, 80., 1.5, .2, 46, 6, 3.1415/
260= CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA SERIE
262=C

```

```

260= DO 1 J=1, 101
270= J=2*I-1
280= CALL DD31A(R, V1, W, U, W., 1.5708, 1, SINT, CINT)
290= B(I)=4.*SINT/PI
300= WRITE(2, 3) U, B(I)
310= 3 FORMAT(F5.0, F10.4)
320= 1 CONTINUE

```

```

331=C
332=C TRACE DES FOUIR.
333=C

```

```

340= CALL DFLYAN(5, 100, W, 3.146, 2LPG, 10LEQUIPOTENTIELLES,
350= 12LEV, 2LRR, 2LPP, 2LPM)
360= CALL IBENA(ID, ID, ID)
370= CALL PNUMA(W., Z., S, S, Z.)
380= CALL BOUCLE(FONC, IC, IL, ALG, AHT, HMIN, HMAX, DH, DAR, IT, JT, TAB)
390= CALL PNUMA(W., Z., S, S, Z.)
400= STOP
410= EN)

```

```

411=C
412=C DIFFERENTES FONCTIONS UTILISEES
413=C

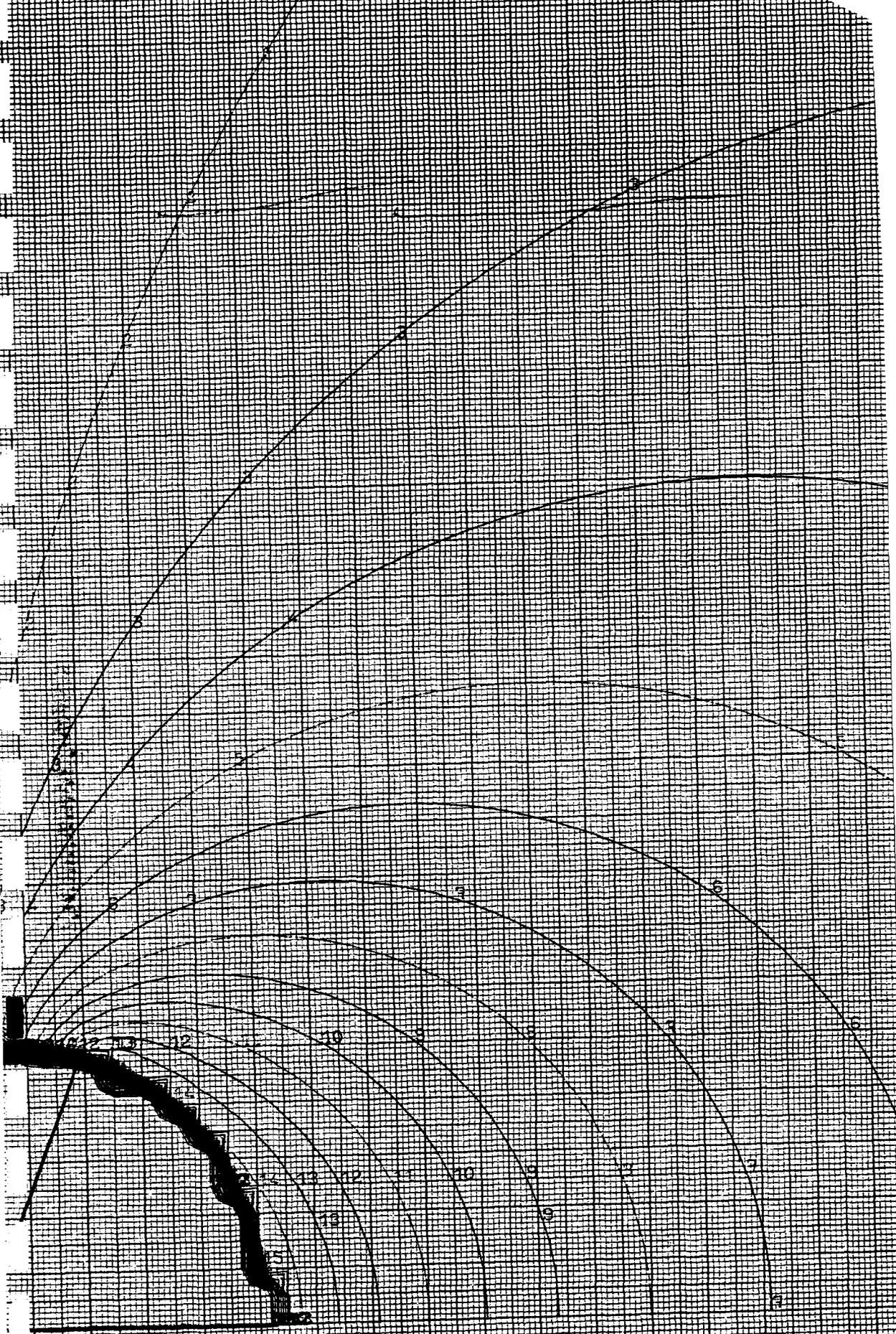
```

```

410= FUNCTION F(X)
420= DATA V, R, PI, PI/100., 2.01, W, 523, 3.1415/
430= S=PI*R
440= AG=PI/2.-FI
450= IF(X.GT. AG) GO TO 4
460= F=V/(2.*ALOG(2.*R/S))*ALOG((1.+SIN(2.*X*(PI/2.-FI)/PI))/
470= (1.-SIN(2.*X*(PI/2.-FI)/PI)))
480= GO TO 2
490= 4 F=V
500= 2 CONTINUE

```

```
510=      RETURN
520=      END
530=      FUNCTION FONC(I, J)
540=      COMMON B(101)
550=      DATA R, PI, B0/.01, 3.1416, 0.3/
560=      J=J-1
570=      D=FLOAT((I-1)*(I-1))/100.+FLOAT(J*J)/100.
580=      IF(D.LE.1.01) GO TO 1
590=      E=(I-1)*(I-1)+J*J
600=      PR=SQRT(E)*R/10.
610=      Q=FLOAT(J)/FLOAT(I)
620=      TETA=ATAN(Q)
630=      FONC=0.
640=      DO 2 K=1, 101
650=      FONC=FONC+(R/PR)**((2*K-1)*B(K)*COS((2*K-1)*TETA)
660= 2     CONTINUE
670=      FONC=B0*FONC
680=      RETURN
690= 1     FONC=-11.
700=      RETURN
710=      END
```



EQUIPOTENTIELLES  $\phi$

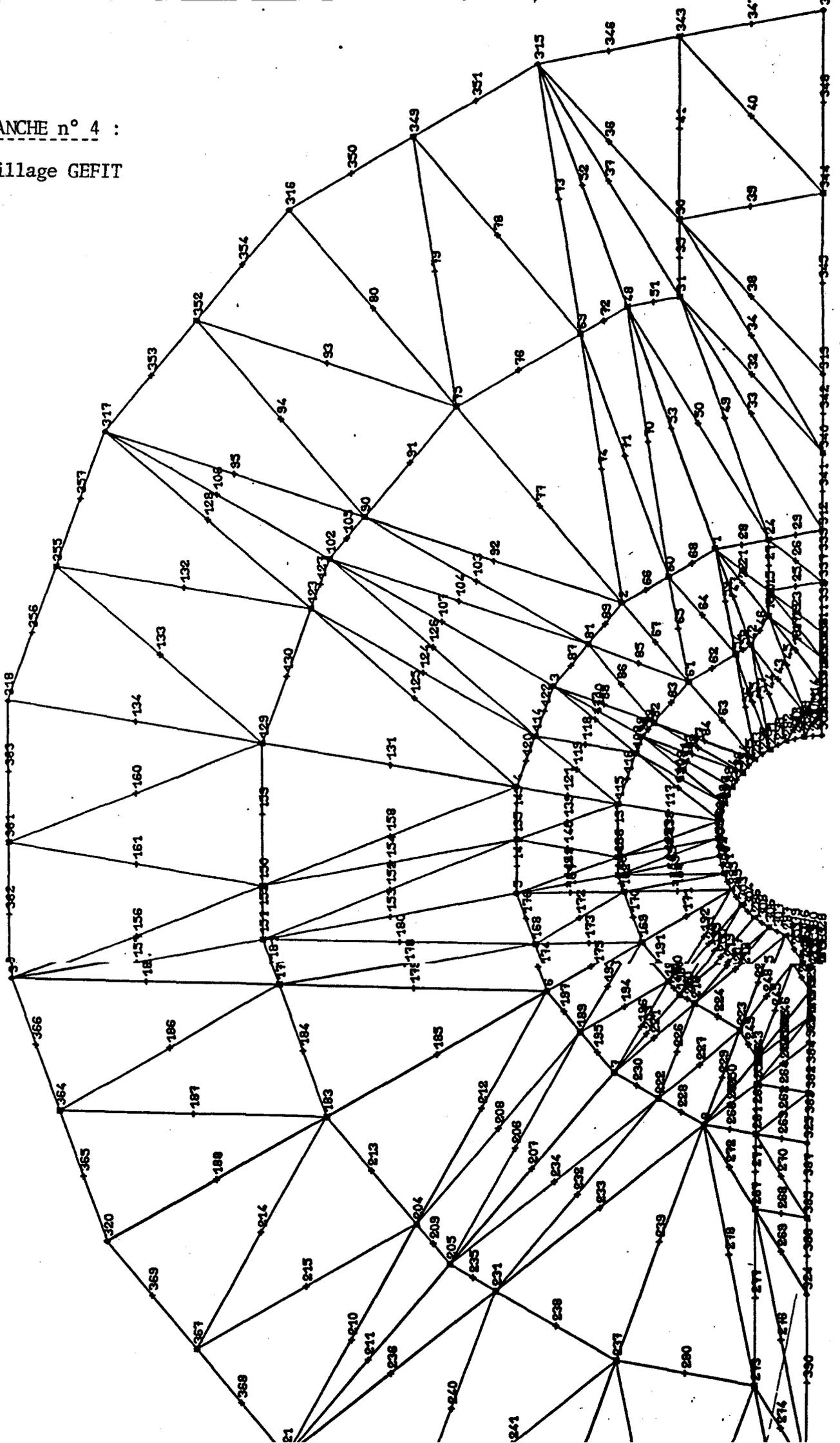
```

100=GHJL, T200, CM50000.
110=ACCOUNT, SDF, DCTGE, PETUDE, C14E.
120=FTN, PMD.
130=ATTACH, OLP, HARWELL, ID=BIBLI.
140=LIBRARY(OLP).
150=LGO.
160=*EOR
170= PROGRAM FOR2(INPUT, OUTPUT, TAPE1=INPUT, TAPE2=OUTPUT)
180= DIMENSION B(500)
190=C
200=C ANGLE AXE/SECTEUR=ALPHA
210=C ANGLE SECTEUR = FI
220= DATA PI, EPS, AI, BM, PO, U, FI, R/3. 1416, 0.001, 700., 0.50
230= , 1000., 0.01, 0.1745, 0.015/
240= PI2=PI/2.
250= DO 1 I=1, 150
260= U=FLOAT(2*I-1)
270= CALL QD01A(.1, 10, U, 0., PI2, 1, SINT, CINT)
280= B(I)=4.*SINT/PI
290= WRITE(2, 3) U, B(I)
300= 3 FORMAT(F5.0, E12.4)
310= 1 CONTINUE
320=C
330=C CALCUL DU COEF. HIFI
340= HIFI=AI*BM*R/PO/U/U
350=C
360=C CALCUL DE LA PRESSION D'ARRET
370=C
380= DELTAP=0.
390= DO 2 I=1, 150
400= DELTAP=DELTAP+B(I)/((1+EPS)**(2*I+1))
410= 2 CONTINUE
420= WRITE(2, 5)DELTAP
430= 5 FORMAT(15X, E12.4)
440= STOP
450= END)
460= FUNCTION F(X)
470= DATA V, R, FI, PI, ALPHA/100., 0.015, 0.1745, 3.1416, 1.5708/
480= S=2/SQRT((1+SIN((PI/2-FI)*(PI/2-FI)*2/PI))/(1-SIN((PI/2-FI)
*(PI/2-
490= :FI)*2/PI)))
500= IF(X.LT.1.3952)GO TO 4
510= F=V
520= RETURN
530= 4 F=V/(2.*ALOG(2.*R/S))*ALOG((1.+SIN(X*2.*(PI/2.-FI)/PI))/
540= (1-SIN(X*2.*(PI/2.-FI)/PI)))
550= RETURN
560= END)

```

On trouve une pression d'arrêt de l'ordre du mm d'eau (ordre I)

PLANCHE n° 4 :  
Maillage GEFIT



B I B L I O G R A P H I E

- (1) - E. DURAND  
Electrostatique - Masson
- (2) - K. KARAMCHETI  
Principles of Ideal-Fluit Aérodynamics - Krieger
- (3) - LANDAU & LIFCHITZ  
Electrodynamique des milieux continus - Edition de Masson
- (4) - D. BELLET - M. THIRRIOT  
La magnétohydrodynamique - PUF
- (5) - J.L. LIONS  
Cours d'analyse numérique - Polytechnique
- (6) - B. ZAPPOLI  
Note Technique n° 9 - GEPAN/CNES
- (7) - E. BERNARD - F. JEAN  
Projet de fin d'études - E.N.S.A.E.

-----